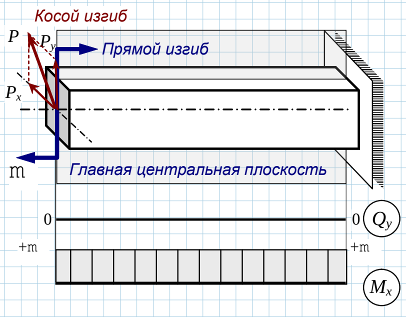
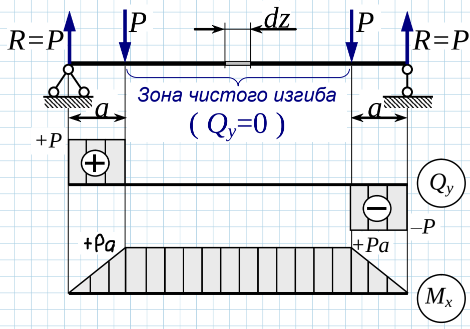
Лек.10. 2.5-2.7 Определение напряжений

11 ноября 2022 г.
11:30

2.5 Прямой чистый изгиб

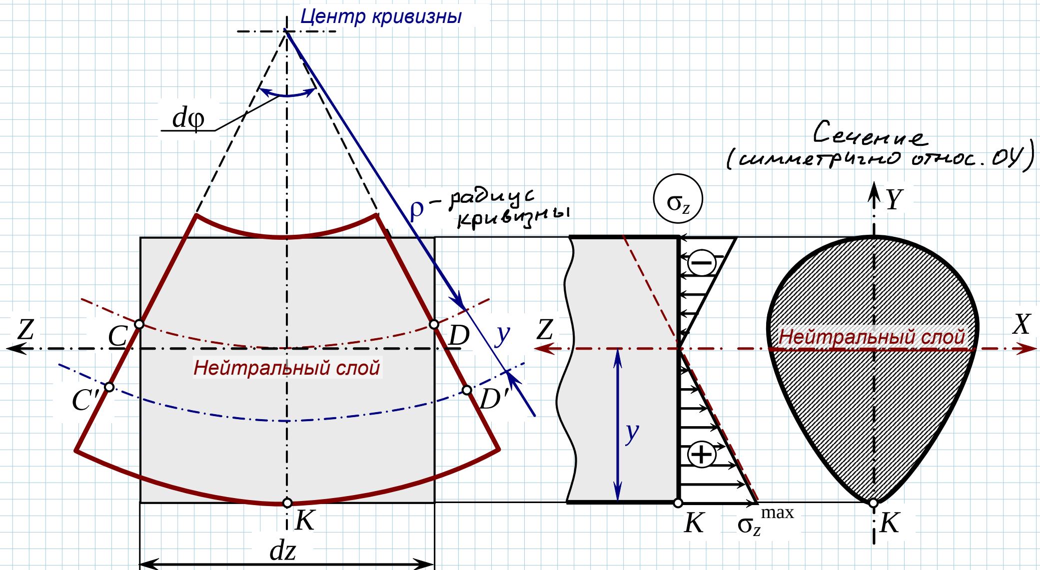




Прямой изгиб – если происходит в ГЦП
Чистый – если нет сдвига ($Q_y = 0$)

Доп. гипотеза - о ненадавливании слоёв. Продольные слои нагруженной балки друг на друга не давят.

Рассмотрим деформацию участка балки длиной dz



1. Г.С. Сечения, ограничивающие участок dz, повернутся друг относительно друга на некоторый угол $d\varphi$. При этом верхние волокна сожмутся (укоротятся), а нижние – растянутся (удлинятся). Очевидно, будут иметь место волокна, которые не изменили свою длину. Совокупность последних образует т.н. нейтральный слой

Найдём деформацию волокон, расположенных на расстоянии y от нейтрального слоя

$$\varepsilon_z = \frac{\Delta l}{l} = \frac{C'D' - CD}{CD} = \frac{(\rho + y)\,d\varphi - \rho\,d\varphi}{\rho\,d\varphi} = \frac{\cancel{\rho\,d\varphi} + y\cancel{d\varphi} - \cancel{\rho\,d\varphi}}{\rho\,\cancel{d\varphi}} = \frac{y}{\rho}$$

$CD = dz = \rho\,d\varphi$

$C'D' = (\rho + y)\,d\varphi$

$\boxed{\varepsilon_z = \frac{y}{\rho}}$ – это матем. выраж-е гипотезы плоских сечений для изгиба

2. Ф.С. $\sigma_z = E\varepsilon_z = E\frac{y}{\rho}$ (*)

3. С.С. Все ВСФ, кроме $M_x = 0$ (чистый изгиб).

Из (5) $N_z = \int_A \sigma_z\,dA = \int_A E\frac{y}{\rho}\,dA = \frac{E}{\rho}\underbrace{\int_A y\,dA}_{S_x} = \overset{\neq 0}{\frac{E}{\rho}} \cdot \overset{=0}{S_x} = 0$ (по смыслу)

$S_x = 0$ – т.е. нейтр. ось проходит через Ц.Т. сечения

Из (6) $M_y = \int_A \sigma_z x\,dA = \int_A E\frac{y}{\rho}x\,dA = \frac{E}{\rho}\underbrace{\int_A xy\,dA}_{J_{xy}} = \overset{\neq 0}{\frac{E}{\rho}} \overset{=0}{J_{xy}} = 0$

$S_x = 0$ т.е. нейтр. ось проходит через ц.т. сечения

Из (6) $M_y = \int\limits_A \sigma_z x\, dA = \int\limits_A E\frac{y}{\rho} x\, dA = \frac{E}{\rho}\underbrace{\int\limits_A xy\, dA}_{J_{xy}} = \overset{\neq 0}{\frac{E}{\rho}} \overset{=0}{J_{xy}} = 0$

$J_{xy} = 0$ – т.е. оси X и Y являются главными центральными.

Из ненулевых ВСФ есть только M_x:

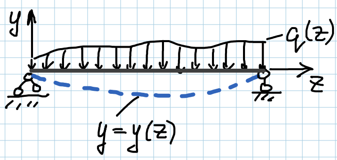
$$\text{Из (6)} \quad M_x = \int\limits_A \sigma_x y\, dA = \int\limits_A E\frac{y}{\rho} y\, dA = \frac{E}{\rho}\overbrace{\int\limits_A y^2 dA}^{J_x} = \frac{E}{\rho}J_x \qquad (**)$$

Из (*) и (**) $\xrightarrow{(17)}$ $\boxed{\sigma_z = \frac{M_x}{J_x} y}$ – формула для определения нормальных напряжений при прямом чистом изгибе

Из (**) (18) $\boxed{\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{EJ_x}}$ – это ур-е изгиба балки. Дифференциальное. Почему?

$\frac{1}{\rho} = \varkappa$ – кривизна

Из математики $\varkappa = \dfrac{y''}{(1+\cancel{y'^2}_{0})^{\frac{3}{2}}}$, $y = y(z)$ – здесь функция прогиба



Т.к. прогибы y малы, y' (углы поворота) тоже малы

Тогда y'^2 – величина 2-го порядка малости,

т.е. $\varkappa = \frac{1}{\rho} \approx y''$

То $\frac{1}{\rho} = y'' = \frac{M_x}{EJ_x}$ или

$$\left.\begin{aligned} EJ_x y'' &= M_x \\ EJ_x y''' &= Q_y \\ \boxed{EJ_x y^{IV}} &\boxed{= q} \end{aligned}\right\} \text{Диф. ур-е изгиба балки (18 а)}$$

приближенное – справедливо только для малых прогибов. Это наш случай (см. §1.6)

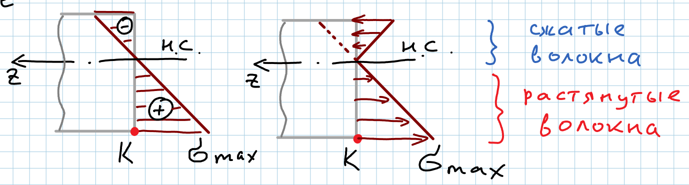
Эпюра напряжений

Из (17) – $\sigma_z = \sigma_z(y)$ – линейная функция координаты y

при $y = 0$ $\quad \sigma_z = 0$

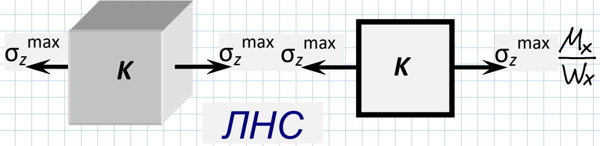
при $y = y_{max}$ $\quad \sigma_z^{max} = \frac{M_x}{J_x} y_{max} = \frac{M_x}{W_x}$, где $W_x = \frac{J_x}{y_{max}}$ – осевой момент сопротивления

Эпюра показана выше



Опасная точка – наиболее удалённая точка от нейтрального слоя (т. K).

Напряжённое состояние в опасной точке

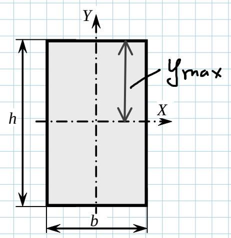


НС характеризуется наличием только нормального напряжения, т.е., как и при раст. -сжатии – линейное (одноосное) напряжённое состояние (Л.Н.С.)

Об осевом моменте сопротивления $W_x = \frac{J_x}{y_{max}}$ [м³]

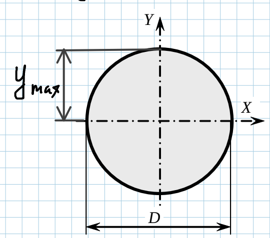
Для простых фигур:

Прямоугольник



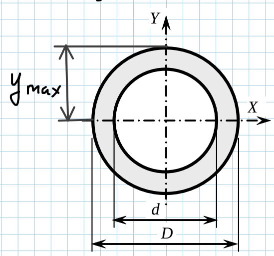
$$\boxed{W_x = \frac{\frac{bh^3}{12}}{\frac{h}{2}} = \frac{bh^2}{6}}$$

Круг



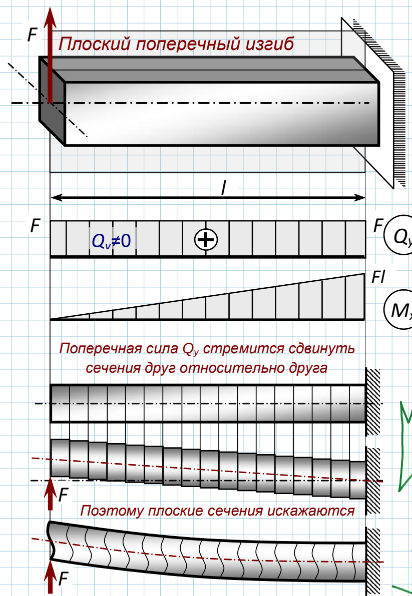
$$\boxed{W_x = \frac{\frac{\pi D^4}{64}}{\frac{D}{2}} = \frac{\pi D^3}{32}}$$

Кольцо



$$\boxed{W_x = \frac{\frac{\pi D^4}{64}(1-\alpha^4)}{\frac{D}{2}} = \frac{\pi D^3}{32}(1-\alpha^4)}$$

2.6. Плоский поперечный изгиб. Нормальные напряжения



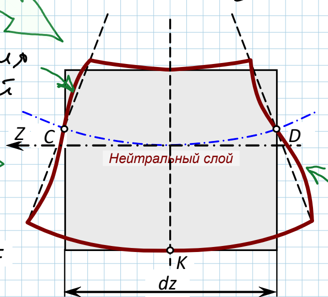
Поперечный — когда есть поперечная сила. Здесь $Q_y \neq 0$. Т.о. поперечные сечения не только поворачиваются друг относительно друга, но и стремятся сдвинуться — появляются касательные напряжения в поперечных, а с учетом парности – и в продольных сечениях балки. Это приводит к искажению (депланации) сечений. Т.е., строго говоря, гипотеза плоских сечений здесь не выполняется.

Как показывают исследования, погрешность, вызываемая депланацией в случае изгиба, невелика для достаточно длинных балок, а мы в курсе ПФ такие и рассматриваем (вспомним определение бруса/балки). Поэтому для определения нормальных напряжений будем использовать формулу (17), полученную для чистого изгиба:

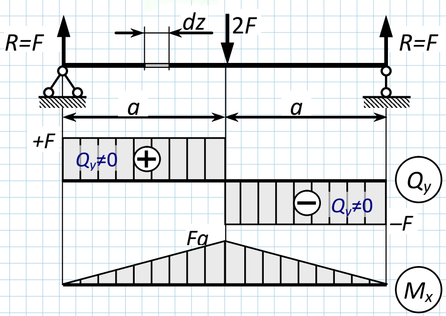
$$\boxed{\sigma_z = \frac{M_x}{J_x} y} \text{ – см (17)}$$

формула для определения нормальных напряжений при изгибе

депланация сечений

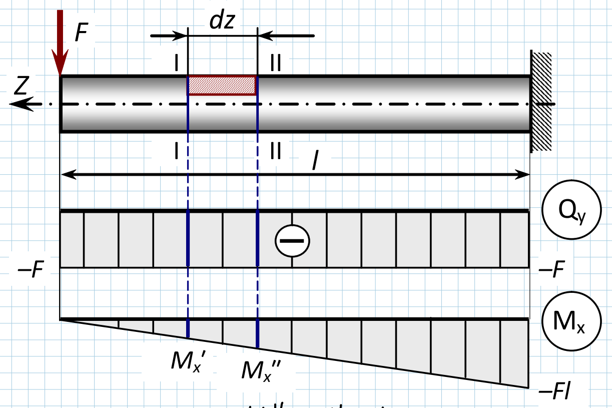


депланация сечений



Касательные напряжения – в след. §

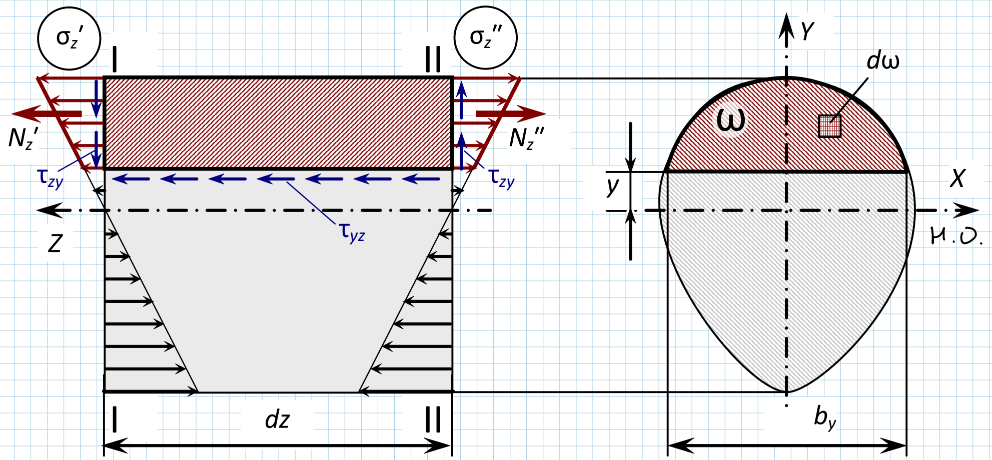
2.7. Плоский поперечный изгиб. Касательные напряжения



$$M''_x = M'_x + dM_x$$

Здесь отступим от алгоритма, используемого для нахождения напряжений ранее.

Так как по закону парности касат. напр-я возникают как в поперечных, так и в продольных сечениях, рассмотрим равновесие фрагмента бруса длиной dz, выделенного двумя поперечными сечениями I-I и II-II и плоскостью, параллельной нейтральному слою (XZ) и отстоящей от него на некоторое расст-е y.



Выделенный фрагмент находится в равновесии под действием нормальных напряжений σ'_z и σ''_z и касательных напряжений τ_{xy} (в попер. сеч-ях) и τ_{yz} (в продольном)

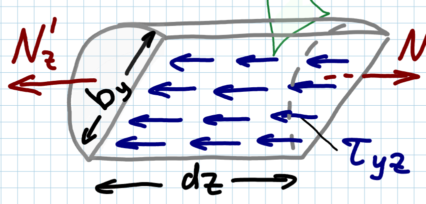
$$\sum F_z = 0 \quad \text{, т.е.} +N'_z - N''_z + N^*_z = 0 \qquad (*)$$

где
$$N'_z = \int_\omega \sigma'_z\, d\omega = \text{см.}(17) = \int_\omega \frac{M'_x}{J_x}\, y\, d\omega,$$
$$N''_z = \int_\omega \sigma''_z\, d\omega = \int_\omega \frac{M''_x}{J_x}\, y\, d\omega = \int_\omega \frac{M'_x + dM_x}{J_x}\, y\, d\omega \; -$$

– равнодействующие нормальных напр-й, приходящихся на отсечённую часть ω рассматриваемых поперечных сечений

$$N^*_z = \tau_{yz} \cdot \overset{\text{площадка}}{b_y\, dz}$$ – равнодействующая касат. напр-я в продольном сечении,

b_y – ширина сечения на расст-и y от НО



Тогда (*) запишется

$$\int_\omega \frac{M'_x}{J_x}\, y\, d\omega - \int_\omega \frac{M'_x + dM_x}{J_x}\, y\, d\omega + \tau_{yz} \cdot b_y dz = 0$$

$$\cancel{\int_\omega \frac{M'_x}{J_x}\, y\, d\omega} - \cancel{\int_\omega \frac{M'_x}{J_x}\, y\, d\omega} - \int_\omega \frac{dM_x}{J_x}\, y\, d\omega + \tau_{yz}\, b_y\, dz = 0$$

$$\tau_{yz} b_y dz = \frac{dM_x}{J_x} \underbrace{\int\limits_{\omega} y d\omega}_{= S_x^{\omega}} = \frac{dM_x}{J_x} \cdot \frac{S_x^{\omega}}{b_y dz}$$

S_x^{ω} – стат. момент площади ω относит. оси X

Помним, что (см. 2) $\frac{dM_x}{dz} = Q_y$.

Окончательно $$\boxed{\tau_{yz} = \frac{Q_y S_x^{\omega}}{J_x b_y}} \qquad (19)$$

(19) – формула для определения касат. напр-й при поперечном изгибе (формула Д.И. Журавского),

где Q_y – поперечная сила в рассматриваемом сечении

S_x^{ω} – стат. м-т отсеченной части сечения отн. Н.О.

J_x – осевой м-т инерции ВСЕГО сечения

b_y – ширина сечения на уровне, где определяются напряжения

По закону парности $\tau_{zy} = \tau_{yz}$, т.е. ф-лу (19) используем для определения касат. напр-й в поперечных сечениях бруса.