

2.8. Распределение касательных напряжений по сечению при изгибе

Согласно формуле Журавского (19) $\tau_{zy} = \tau(y)$ - функция координаты y : $\tau_{zy} = \frac{Q_y S_x^w}{J_x b_y}$

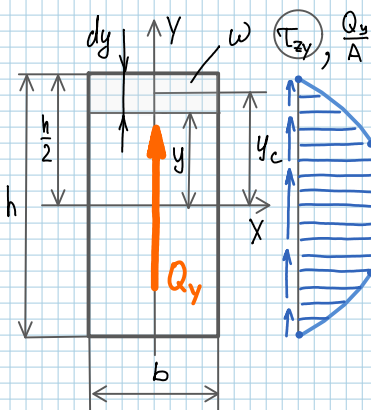
Запишем это более явно: $\tau_{zy}(y) = \frac{Q_y}{J_x} \cdot \frac{S_x^w(y)}{b(y)}$

Найдем $\tau(y)$ для различных сечений.

1) Прямоугольное сечение

$$U_3(19) \quad \tau_{zy} = \frac{Q_y \cdot \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)}{\frac{bh^3}{12} \cdot b} = \frac{Q_y \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) \cdot 12}{2 bh^3} = \frac{6Q_y}{bh^3} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

$$S_x^w = \omega \cdot y_c = b \left(\frac{h}{2} - y \right) \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} + y \right) = \frac{b}{2} \left[\left(\frac{h}{2} \right)^2 - y^2 \right] = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$



$$\omega = b \cdot \left(\frac{h}{2} - y \right)$$

$$y_c = y + \left(\frac{h}{2} - y \right) \cdot \frac{1}{2} = y + \frac{h}{4} - \frac{y}{2} = \frac{h}{4} + \frac{y}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} + y \right)$$

$$J_x = \frac{bh^3}{12}$$

$$b_y = b$$

$$\tau_{zy} = \frac{6Q_y}{bh^3} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) \quad \text{— уравнение параболы}$$

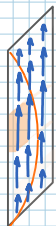
Строим по трём точкам

$$\text{@ } y=0 \quad \tau_{zy} = \frac{6Q_y}{bh^3} \cdot \frac{h^2}{4} = \frac{3}{2} \frac{Q_y}{bh} = \frac{3}{2} \frac{Q_y}{A} = \tau_{zy}^{\max}$$

$$\text{@ } y = \pm \frac{h}{2} \quad \tau_{zy} = \frac{6Q_y}{bh^3} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{h^2}{4} \right) = 0$$

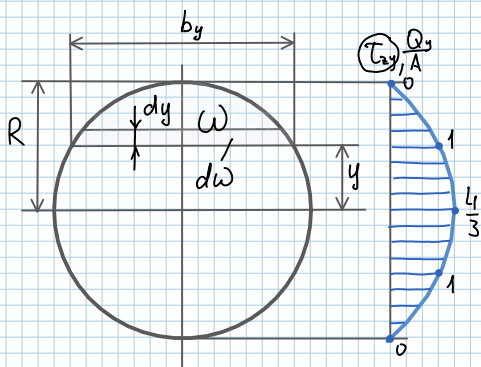
для интереса

$$\text{@ } y = \pm \frac{h}{4} \quad \tau_{zy} = \frac{6Q_y}{bh^3} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{h^2}{16} \right) = \frac{6Q_y}{bh^3} \left(\frac{4h^2}{16} - \frac{h^2}{16} \right) = \frac{3 \cdot 6Q_y}{bh^3} \cdot \frac{3h^2}{16} = \frac{9}{8} \frac{Q_y}{bh} = \frac{9}{8} \frac{Q_y}{A} = 1,125 \frac{Q_y}{A}$$



2) Круглое сечение

Круглое сечение актуально, многие крепежные элементы (защёлки, болты, шурупы и др.) имеют круглое сечение и работают на срез.



$U_3(19)$

$$S_x^w = \int y d\omega = \int_0^R y \cdot b_y \cdot dy = \int_0^R y \cdot 2 \sqrt{R^2 - y^2} dy = \frac{2}{3} (R^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$b_y(y) = 2 \sqrt{R^2 - y^2}$$

$$J_x = \frac{\pi D^4}{64} = \frac{\pi (2R)^4}{64} = \frac{\pi \cdot 16R^4}{64} = \frac{\pi R^4}{4}$$

$$\tau_{zy} = \frac{4Q_y}{3\pi R^4} (R^2 - y^2) = \frac{4Q_y}{3\pi R^2} \left(1 - \frac{y^2}{R^2} \right) \quad \text{— опять параболы}$$

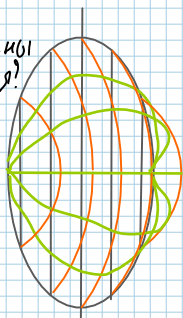
$$\text{@ } y=0 \quad \tau_{zy} = \frac{4}{3} \frac{Q_y}{\pi R^2} = \frac{4}{3} \frac{Q_y}{A} = \tau_{zy}^{\max}$$

$$\text{@ } y=R \quad \tau_{zy} = 0$$

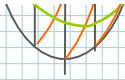
для интереса

$$\text{@ } y=R/2 \quad \tau_{zy} = \frac{4Q_y}{3\pi R^2} \left(1 - \frac{R^2}{4R^2} \right) = \frac{4}{3} \frac{Q_y}{\pi R^2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{1} \frac{Q_y}{A}$$

Как распределены напряжения?



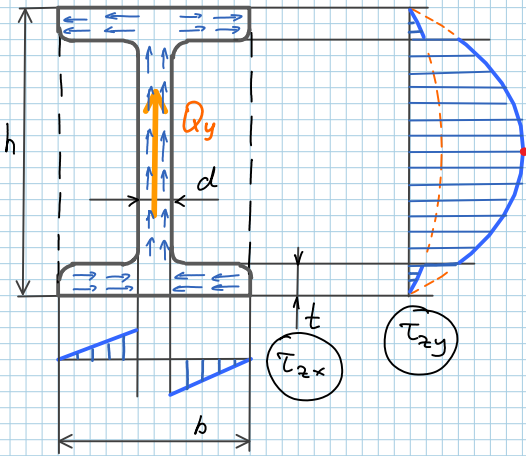
Но чаще в расчётах на срез принимают для простоты равномерное распред-е напр-ий: $\tau \approx \frac{Q_y}{A}$.
Об этом поговорим позже



простота равномерное распред-е напр-й: $\tau \approx \frac{Q_y}{A}$.
 Об этом поговорим позже

3) Двутавр

Эпюра τ по высоте сечения является комбинацией эпюр для прямоугольников $h \times d$ и $h \times b$



$$\tau_{zy}^{\max} = \frac{Q_y S_x^{\omega_{\max}}}{J_x d} = \frac{Q_y}{k d}$$

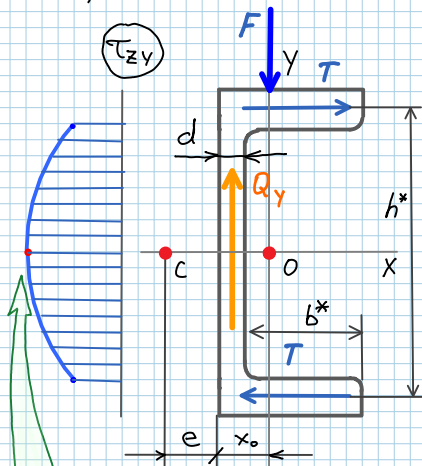
$$\frac{J_x}{S_x^{\omega_{\max}}} = k$$

$S_x^{\omega_{\max}}$ — при $y=0$ — для полки сечения

$$\tau_{zx} = \frac{Q_y x}{2 J_x} (h-t) \text{ — из усл-я равновесия}$$

Значительное влияние оказывают такие факторы как радиусы скручивания, остаточные напряжения от проката.

4) Швеллер



При изгибе касат. напр-я в полках образуют закручивающий момент. Для прямого изгиба следует силу прикладывать в особой точке — центре кручения С (не в ЦТ). Найдем положение т.С.

T — равнодействующая касат. напряжений в полках
 O — центр тяжести сечения

Если \vec{F} проходит через т. O , имеет место скруч. м-т:

$$M_o = T \cdot h + Q_y \cdot x_o$$

последствия

$$\tau_{zy}^{\max} = \frac{3Q(h^2 + 4b^2)}{dh^2(h + 6b^2)}$$

$$\tau_{zx}^{\max} = \frac{3Qb^2}{dh^2(h + 6b^2)}$$

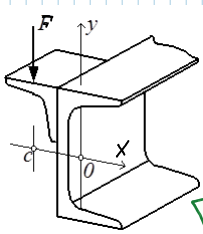
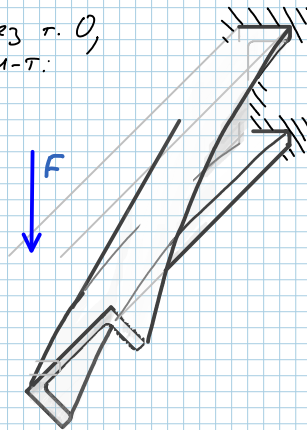
Если F приложить в т.С

$$T \cdot h + Q_y \cdot x_o = F \cdot (e + x_o)$$

$$\text{т.к. } Q_y = F$$

$$T \cdot h + F \cdot x_o = F \cdot e + F \cdot x_o$$

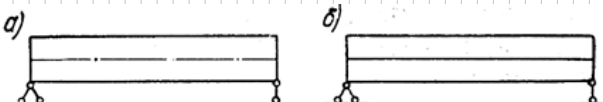
$$e = \frac{T \cdot h}{F}$$

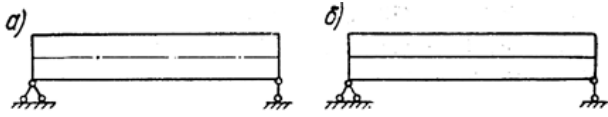


Точка С, через которую должна проходить линия действия силы при отсутствии закручивания называется центром кручения при изгибе. Как это обеспечить? См. рис.

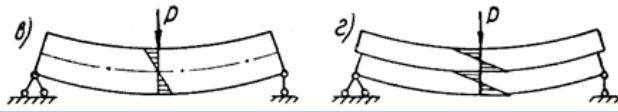
2.9. Роль касательных напряжений (самостоятельно)

Касательные напряжения τ_{yz} , возникающие в балке, являются результатом взаимодействия её смежных продольных слоёв. На рисунках изображены балки одинаковой площади поперечного сечения, но у одной сечение сплошное $2h \times b$, а у другой состоит из двух одинаковых брусков прямоугольного сечения $h \times b$.

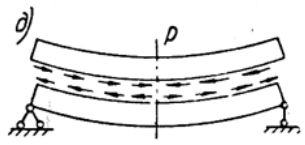




Под нагрузкой обе балки деформируются, как показано ниже.



Из сравнения деформации балок можно убедиться в наличии касательных напряжений в продольных слоях сплошной балки.



Отсутствие связи между слоями сказывается и на величине нормальных напряжений.

Для сплошной балки

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} = \frac{6M_x}{bh^2}$$

У балки из двух брусков каждый брусок работает как отдельная балка, воспринимая половину внешней нагрузки. Тогда

$$\sigma_{\max} = \frac{6 \frac{M_x}{2}}{b \left(\frac{h}{2}\right)^2} = 12 \frac{M_x}{bh^2}$$

То есть, напряжения в балке из двух брусков вдвое выше - она в два раза менее прочная.

Эпюры нормальных напряжений для обоих случаев качественно показаны на рис. в и г.

Вывод. При конструировании балки из нескольких слоёв необходимо обеспечить их совместную работу путем соединения слоёв сваркой, болтами, заклёпками и т.п.