

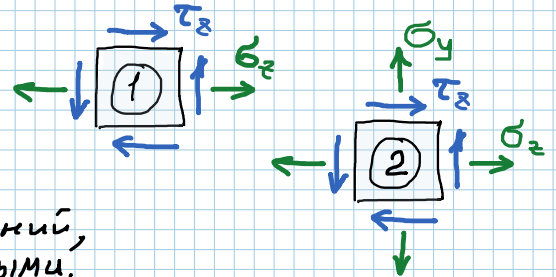
Глава 3. Теория НДС

3.1.

Внешние силы вызывают внутренние, то есть нормальные и касательные напряжения в каждой точке бруса.

Ориентируя элементарную площадку определённым образом, можно свести напр. сост-е в точке к НДС.

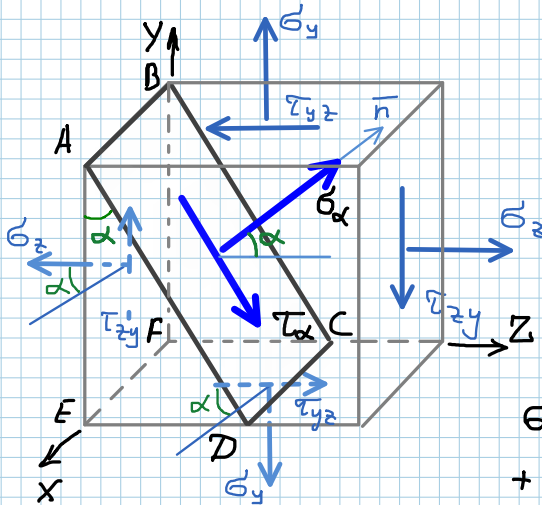
- В брусках это будет состояние ①
- В пластинках и оболочках - состояние ②



Прочность таких частиц определяется не величиной исходных (осевых) напряжений, а значением напряжений, называемых главными.

3.2. Опред-е напр-й в произвольно наклонённых площадках

Рассмотрим элементарный пар-д в НДС и площадку, проходящую через одно из его рёбер и наклонённую к граням на угол α .



$\sigma_\alpha, \tau_\alpha = ?$

Обозначим

$S_{ABCD} = dA$

$S_{ABFE} = dA \cos \alpha$

$S_{CDEF} = dA \sin \alpha$

Равновесие элемента ABCDEF

$\sum F_n = 0$ - проецируем все силы на нормаль

$$\sigma_\alpha \cdot dA - \sigma_z (dA \cos \alpha) \cos \alpha - \sigma_y (dA \sin \alpha) \sin \alpha + \tau_{zy} (dA \cos \alpha) \sin \alpha + \tau_{yz} (dA \sin \alpha) \cos \alpha = 0$$

Итого: $\sigma_\alpha = \sigma_z \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha - \tau_{zy} \sin 2\alpha$

$\sum F_x = 0$ - проецируем на направление, перпендикулярное нормали (21)

$$\tau_\alpha \cdot dA - \sigma_z (dA \cos \alpha) \sin \alpha + \sigma_y (dA \sin \alpha) \cos \alpha - \tau_{zy} (dA \cos \alpha) \cos \alpha + \tau_{yz} (dA \sin \alpha) \sin \alpha = 0$$

т.о. $\tau_\alpha = \frac{\sigma_z - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{zy} \cos 2\alpha$ (22)

3.3. Опред-е н. напр-й и полог-я главн. площадок

гл. напр-я - ех-тг напр-я $\frac{d\sigma}{d\alpha} = 0$ (по 21)

или гл. площадки - где $\tau = 0$, т.е. (22) = 0

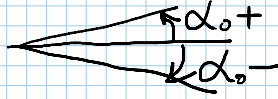
Из обоих выраж-й следует $\tan 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{zy}}{\sigma_z - \sigma_y}$ (23)

или т.к. поворота — $\tau = 0$, т.е. (22) = 0

Из обеих выражений следует $\boxed{\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{zy}}{\sigma_z - \sigma_y}} \quad (23)$

Выражение (23) даёт два реш-я: $2\alpha_0$ и $2\alpha_0 + \pi \rightarrow \underbrace{\alpha_0}_I$ и $\underbrace{\alpha_0 + \frac{\pi}{2}}_{II}$

Правила знаков



- 1)
- 2) σ^+ если растяжение; σ^- если сжатие
- 3) τ^+ если оно по часовой стрелке $\uparrow \tau^+$ $\downarrow \tau^-$
(Нас интересуют напр-я σ попер. сечениях)

Из (21) $\sigma^I = \sigma_z \cos^2 \alpha_0 + \sigma_y \sin^2 \alpha_0 - \tau_{zy} \sin 2\alpha_0$
 $\sigma^{II} = \sigma_z \cos^2(\alpha_0 + 90^\circ) + \sigma_y \sin^2(\alpha_0 + 90^\circ) - \tau_{zy} \sin 2(\alpha_0 + 90^\circ)$

Если здесь $\sin \alpha_0$ и $\cos \alpha_0$ выразить через $\operatorname{tg} \alpha_0$, а tg взять по ф-ле (23), после некоторых преобразований получим:

$\boxed{\sigma_{\frac{1}{3}} = \frac{\sigma_z - \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_z - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{zy}^2}} \quad (24)$

Всегда считается, что $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$

3.4. Определение т.к. напр-ий в брусках

Согласно гипотезе, что стержневые волокна не давят друг на друга, $\sigma_y = 0$

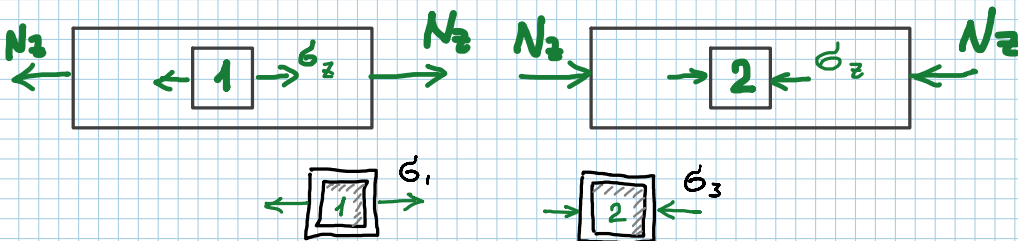
Тогда из общей ф-лы (24) получим:

$\boxed{\sigma_{\frac{1}{3}} = \frac{\sigma_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_z^2}} \quad (24a)$

и $\boxed{\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2\tau_z}{\sigma_z}} \quad (23a)$

Частные случаи деформирования

1. Растяжение — сжатие



$\sigma_1 = \frac{\sigma_z}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_z}{2}\right)^2} = \sigma_z$

$\sigma_1 = -\frac{\sigma_z}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_z}{2}\right)^2} = 0$

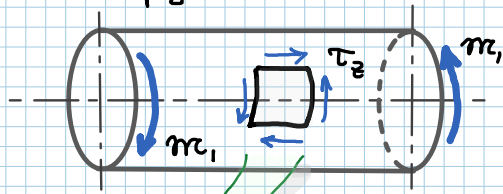
$\sigma_3 = \frac{\sigma_z}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_z}{2}\right)^2} = 0$

$\sigma_3 = -\frac{\sigma_z}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_z}{2}\right)^2} = -\sigma_z$

$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2 \cdot 0}{\sigma_z} = 0$

$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2 \cdot 0}{-\sigma_z} = 0$

2. Кручение

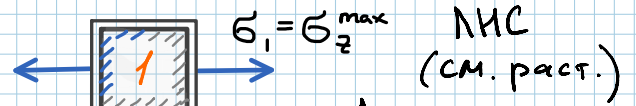
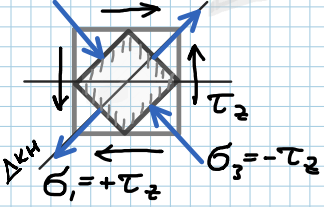


$$\sigma_1 = +\sqrt{\tau_z^2} = +\tau_z$$

$$\sigma_3 = -\sqrt{\tau_z^2} = -\tau_z$$

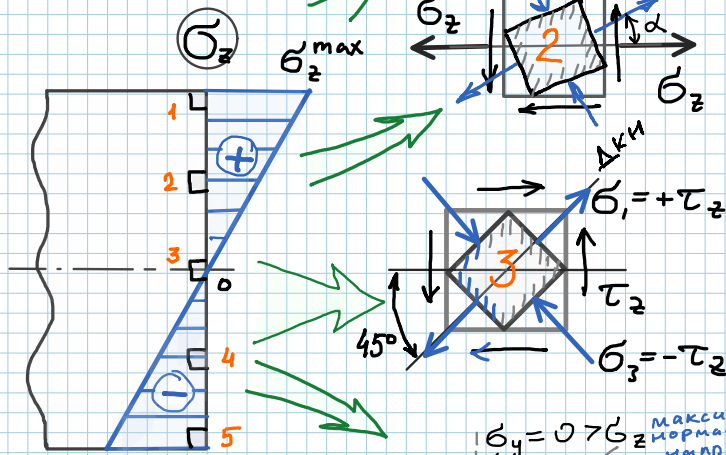
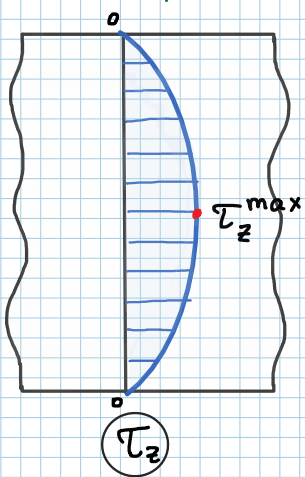
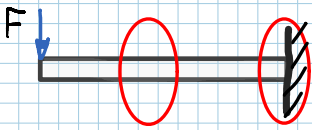
$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2(-\tau_z)}{0} = +\infty$$

$$2\alpha = 90^\circ; \alpha = 45^\circ$$



ЛНС
(см. раст.)

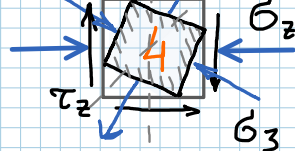
3. Изгиб



ЛНС

$\sigma_y = 0 > \tau_z$ максимальное нормальное напр-е

$\alpha_0 \leftarrow \rightarrow$ σ_1 ЛНС



ЛНС

ЛНС (см. сжатие)

Для тт. 2 и 4 используем полные формулы (24а) и (23а).

$$\text{т.2: } \operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2(-\tau_z)}{\sigma_z} = \frac{2\tau_z}{\sigma_z} \quad \alpha_0 = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{2\tau_z}{\sigma_z} \right)$$

Определив $\angle \alpha_0$, откладываем его от направления наибольшего норм. напр-я. Направл-е наиб. гл. напр-я всегда лежит между наиб. гл. напр-ем и ДКН.