Лек.14. §3.9, конспект

25 декабря 2023 г.
22:36

3.9. Гипотезы прочности

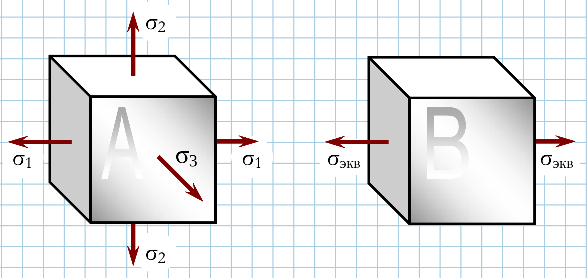

Рис. 3.9.1. К понятию эквивалентного напряжения

1. Гипотеза наибольших нормальных напряжений

Гипотеза была предложена Г. Галилеем в начале XVII в. В качестве критерия предельного состояния (разрушения) предлагалось наибольшее нормальное напряжение σ_1:

$$\sigma_{экв} = \sigma_1 \le [\sigma]$$ (33-1)

Данная гипотеза подтверждается только для некоторых хрупких материалов, не учитывает σ_2 и σ_3 и в настоящее время не используется.

2. Гипотеза наибольших линейных деформаций

Гипотезу предложил Э. Мариотт в 1682 г. За критерий разрушения принимается величина наибольших линейных деформаций.

$$\varepsilon_{max} = \varepsilon_1 = \frac{1}{E}[\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)]$$

Учитывая закон Гука для одноосного напряженного состояния, получаем условие эквивалентности:

$$\sigma_{экв} = E\,\varepsilon_{max} = \sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) \le [\sigma].$$ (33-2)

Эта гипотеза также применима только для хрупких материалов и не рекомендуется к использованию.

3. Гипотеза наибольших касательных напряжений

Гипотезу выдвинул Ш. Кулон (1773 г.). Причиной разрушения считаются максимальные касательные напряжения (которые, как мы знаем, действуют в площадках, расположенными под углом 45° к главным):

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

Для одноосного напряженного состояния $\tau_{max} = \sigma_{экв}/2$. Приравнивая эти два выражения получаем критерий
$\sigma_{экв} = \sigma_1 - \sigma_3 \le [\sigma]$ (33-3)
Данная теория не учитывает σ_2 и применима только для пластичных материалов. Тем не менее, она хорошо отражает поведение этих материалов при нормальной температуре и невысоких скоростях нагружения. В теории пластичности известна как критерий пластичности (Кулона)–Треска–Сен-Венана (вместо допускаемого напряжения [σ] фигурирует предельное $\sigma_т$).

4. Гипотеза октаэдрических касательных напряжений

Согласно гипотезе ответственными за разрушение назначаются касательные напряжения в октаэдрических площадках (площадках, равнонаклонённых к главным). Как известно из §3.5,

$$\tau_{окт} = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

Для одноосного напряженного состояния

$$\tau_{окт} = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_{экв} - 0)^2 + (0 - 0)^2 + (0 - \sigma_{экв})^2} = \frac{\sqrt{2}}{3}\sigma_{экв}$$

Приравниваем выражения, получаем величину эквивалентных напряжений:

$$\sigma_{экв} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \le [\sigma]$$ (33-4)

Гипотеза известна также как энергетическая: прочность при любом напряженном состоянии обеспечена, если удельная потенциальная энергия деформации, идущая на изменение формы, не превысит допускаемого значения, определенного при простом растяжении. Это имеет место при выполнении условия (3.9.4).
Данная теория учитывает σ_2, но так же, как и предыдущая, применима только для пластичных материалов. Величина $\sigma_{экв}$ в данном случае не будет зависеть от того, какому из напряжений присвоить индексы 1-3, что важно при действии нагрузок,

меняющихся во времени по различным законам. Если вместо допускаемого напряжения [σ] фигурирует предельное ($\sigma_т$), данное выражение носит название условия пластичности Мизеса (Губера (Хубера) – Мизеса – Генки).

5. Гипотеза прочности О. Мора (1860 г.)

Гипотеза основана на обработке и обобщении экспериментальных данных. Полагая $\sigma_2 = 0$ и задаваясь различными соотношениями между σ_1 и σ_3 строится экспериментальная кривая ACB – *кривая предельных состояний* (рис. 3.9.2).

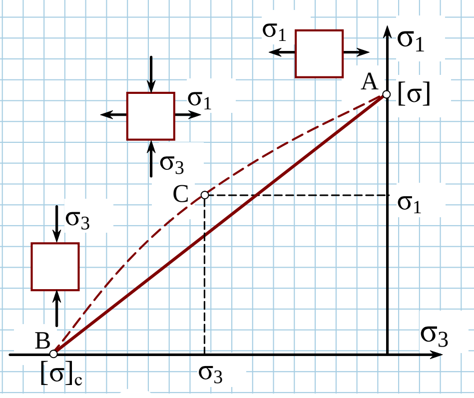

Рис. 3.9.2. Кривая предельных напряженных состояний

Форма кривой предельных состояний определяется свойствами материала и является его механической характеристикой, причем опыты показывают, что наличие напряжения σ_2 не влияет на эту форму. Для простоты на практике кривую прямой (ошибка в безопасную сторону). Для всех точек, лежащих ниже AB, условие прочности выполняется. Уравнение этой прямой в отрезках имеет вид ($x/a+y/b = 1$):

$$\frac{\sigma_3}{-[\sigma]_c}+\frac{\sigma_1}{[\sigma]_p}=1$$

Умножив это выражение на $[\sigma]_p$, можно представить его в виде:

$$\sigma_{экв} = \sigma_1 - k\,\sigma_3 = [\sigma]_p,$$

где $k = [\sigma]_p/[\sigma]_c$., то есть условие прочности будет выглядеть как:

$$\sigma_{экв} = \sigma_1 - k\,\sigma_3 \le [\sigma]_p. \qquad (33\text{-}5)$$

Данная теория применима и для хрупких, и для пластичных материалов. Для пластичных материалов $[\sigma]_p = [\sigma]_c$, то есть, $k = 1$, и гипотеза Мора совпадает с 3-й гипотезой (условием Кулона–Треска–Сен-Венана).
Применимость приведённых гипотез ограничена конкретными условиями. Например, повышение температуры приводит к увеличению пластичности материала, а увеличение скорости нагружения – к понижению и наоборот. Как и в случае условий прочности для простейших состояний, приближённость результатов, полученных с применением гипотез прочности, компенсируется коэффициентом запаса.

Во избежание лишних вычислений удобно выразить главные напряжения через осевые по формулам параграфа 3.4. Тогда условия эквивалентности для последних трех гипотез будут иметь вид:
3-я гипотеза:

$$\sigma_{экв}=\sqrt{\sigma_z^2+4\tau_z^2}\le[\sigma] \qquad (33\text{-}3a)$$

4-я гипотеза:

$$\sigma_{экв}=\sqrt{\sigma_z^2+3\tau_z^2}\le[\sigma] \qquad (33\text{-}4a)$$

5-я гипотеза:

$$\sigma_{экв}=\frac{1-k}{2}\sigma_z+\frac{1+k}{2}\sqrt{\sigma_z^2+4\tau_z^2}\le[\sigma] \qquad (33\text{-}5a)$$

В случае простых (однородных) напряженных состояний (ЛНС, НСЧС) эти условия приводятся к знакомым нам соответствующим условиям прочности при простейших случаях деформирования.