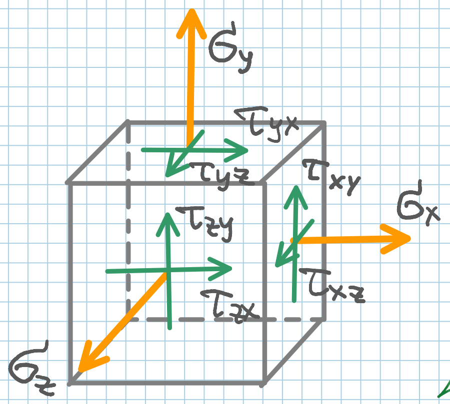
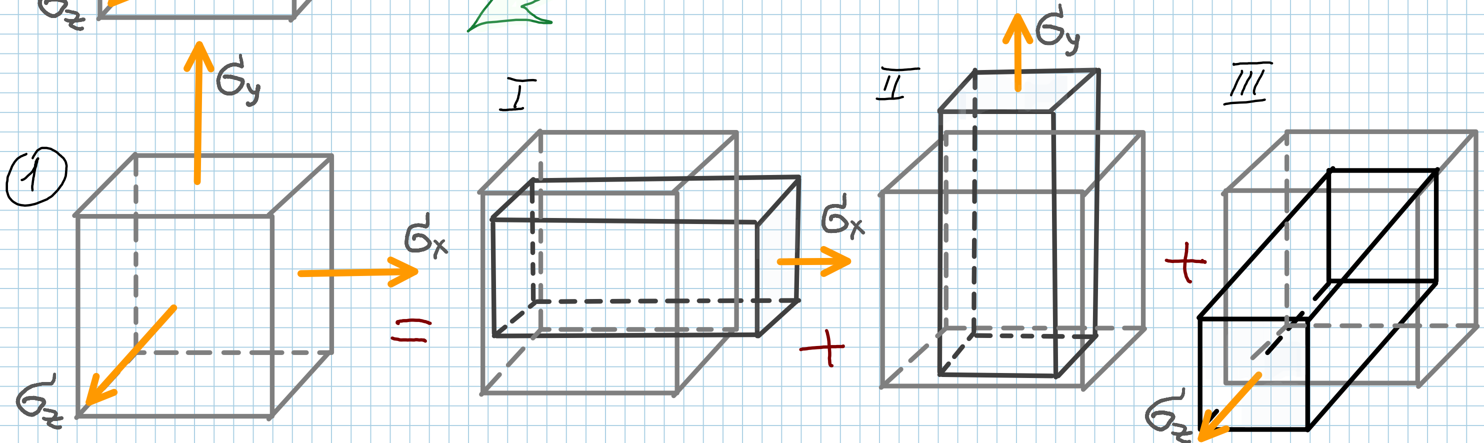
22 декабря 2023 г.
11:30

§3.7. Обобщённый закон Гука (для ОНС)

Ранее (для простого деформир-я) $\begin{cases} \sigma = E\varepsilon \\ \tau = G\gamma \end{cases}$



$= (1) + (2)$

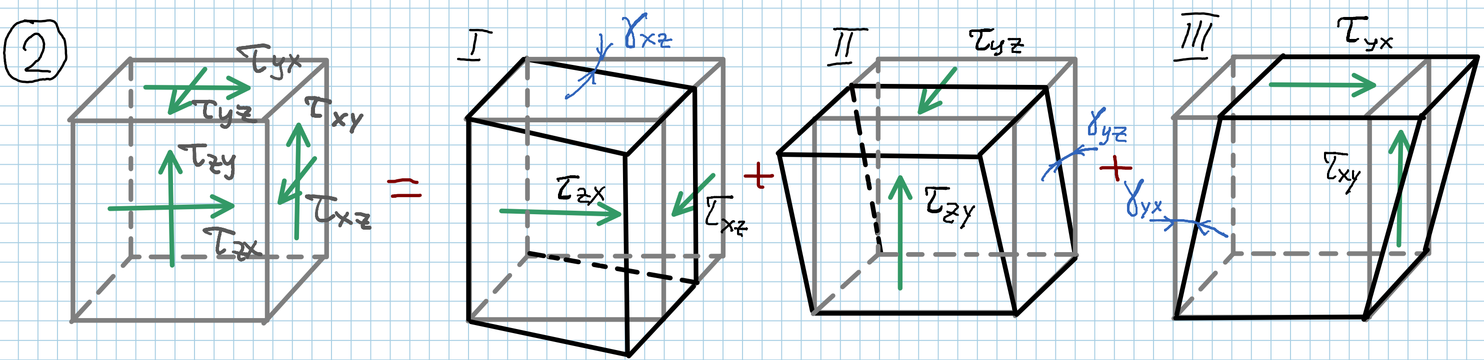


$$\mathrm{I}.\ \sigma_x \rightarrow \varepsilon_x' = \frac{\sigma_x}{E};\quad \varepsilon_y' = -\frac{\nu\sigma_x}{E};\quad \varepsilon_z' = -\frac{\nu\sigma_x}{E}$$

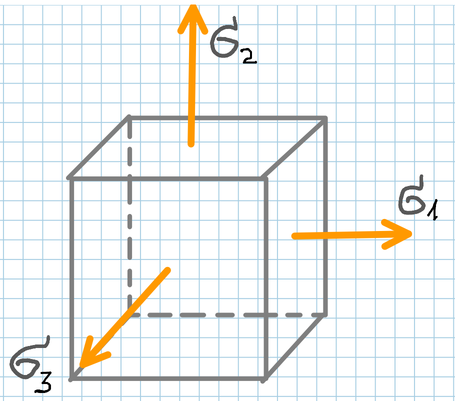
$$\mathrm{II}.\ \sigma_y \rightarrow \varepsilon_y'' = \frac{\sigma_y}{E};\quad \varepsilon_x'' = -\frac{\nu\sigma_y}{E};\quad \varepsilon_z'' = -\frac{\nu\sigma_y}{E}$$

$$\mathrm{III}.\ \sigma_z \rightarrow \varepsilon_z''' = \frac{\sigma_z}{E};\quad \varepsilon_x''' = -\frac{\nu\sigma_z}{E};\quad \varepsilon_y''' = -\frac{\nu\sigma_z}{E}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon_x' + \varepsilon_x'' + \varepsilon_x''' = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)\right] \qquad & \gamma_{xz} &= \frac{\tau_{xz}}{G} \\ \varepsilon_y &= \varepsilon_y' + \varepsilon_y'' + \varepsilon_y''' = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)\right] \qquad & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G} \\ \varepsilon_z &= \varepsilon_z' + \varepsilon_z'' + \varepsilon_z''' = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\right] \qquad & \gamma_{yx} &= \frac{\tau_{yx}}{G} \end{aligned}} \quad (32)$$

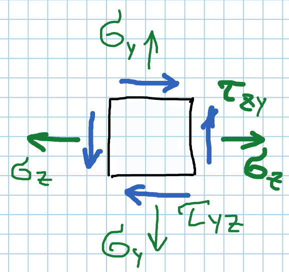


В случае главных осей



$$\boxed{\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{1}{E}\left[\sigma_1-\nu(\sigma_2+\sigma_3)\right]\\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E}\left[\sigma_2-\nu(\sigma_3+\sigma_1)\right]\\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E}\left[\sigma_3-\nu(\sigma_1+\sigma_2)\right]\end{aligned}} \qquad (32а)$$

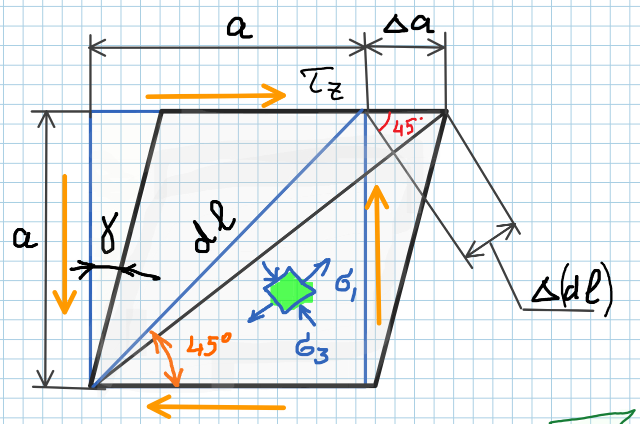
Обобщ. з-н Гука для ПНС



$$\boxed{\begin{aligned}\varepsilon_z &= \frac{1}{E}(\sigma_z-\nu\sigma_y)\\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y-\nu\sigma_z)\\ \varepsilon_x &= -\frac{\nu}{E}(\sigma_y+\sigma_z)\\ \gamma_{zy} &= \frac{\tau_{zy}}{G}\end{aligned}} \qquad (32б)$$

$$\boxed{\begin{aligned}\sigma_z &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_z+\nu\varepsilon_y)\\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y+\nu\varepsilon_z)\\ \tau_{zy} &= G\gamma_{zy}\end{aligned}} \qquad (32в)$$

§3.8. Зависимость между $E,\ G,\ \nu$



$\sigma_1 = +\tau$, $\sigma_3 = -\tau$ } см. ранее напр. при кручении

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{\Delta(d\ell)}{d\ell} = \frac{\gamma \cancel{a} \cancel{\sqrt{2}}\,\cancel{\sqrt{2}}}{2\cdot\cancel{a}\cancel{2}} = \frac{\gamma}{2}$$

$$\Delta(d\ell) = \Delta a\cdot\sin 45° = \gamma a\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$tg\,\gamma \approx \gamma = \frac{\Delta a}{a}$$

$$d\ell = \frac{a}{\cos 45°} = \frac{2a}{\sqrt{2}}$$

$$\underline{\underline{\varepsilon_1}} = \frac{1}{E}\left[\sigma_1-\nu(\underbrace{\sigma_2}_{=0}+\sigma_3)\right] = \frac{1}{E}(\sigma_1-\nu\sigma_3) =$$

$$= \frac{1}{E}\left[\tau-\nu(-\tau)\right] = \frac{\tau}{E}(1+\nu)$$

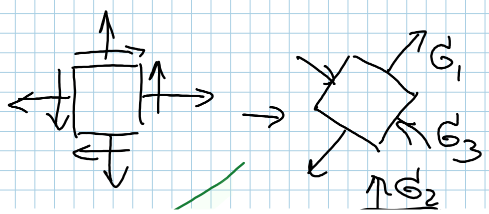
$$\varepsilon_1 = \varepsilon;\quad \frac{\gamma}{2} = \frac{\overset{=G\gamma}{\tau}}{E}(1+\nu)$$

$$\frac{\gamma}{2} = \frac{G\gamma}{E}(1+\nu)$$

$$\boxed{G = \frac{E}{2(1+\nu)}} \qquad (33)$$

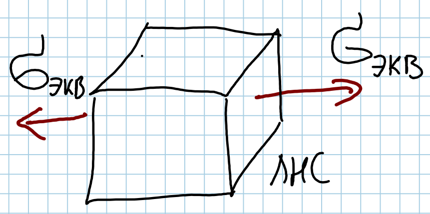
§3.9. Гипотезы прочности

ПНС, ОНС

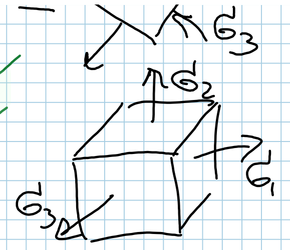


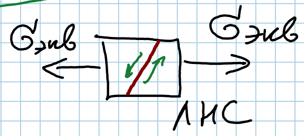
?

ПНС, ОНС



РАВНООПАСНЫ





(1) $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$

$\sigma_1 \le [\sigma]$

$\sigma_{экв} \le [\sigma]$

$$\sigma_{экв} = \boxed{\sigma_1 \le [\sigma]} \qquad (33-1)$$

(2) $\varepsilon_{max} = \varepsilon_1 = \frac{1}{E}\left[\sigma_1 - \nu(\sigma_2+\sigma_3)\right]$

$\varepsilon_{max} = \frac{\sigma_{экв}}{E}$

$$\sigma_{экв} = \boxed{\sigma_1 - \nu(\sigma_2+\sigma_3) \le [\sigma]} \qquad (33-2)$$

(3) $\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$

$\tau_{max} = \frac{\sigma_{экв} - 0}{2}$

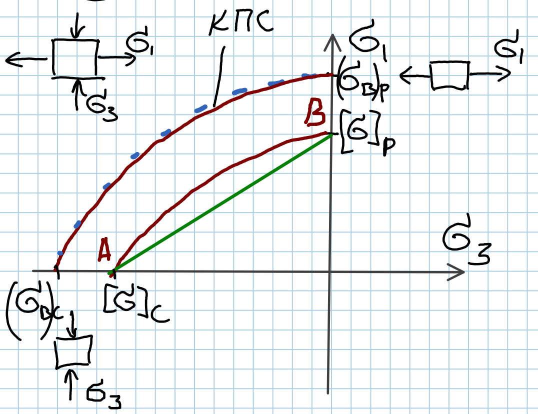
$$\sigma_{экв} = \boxed{\sigma_1 - \sigma_3 \le [\sigma]} \qquad (33-3)$$

(4) $\tau_{окт} = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2}$

$\tau_{окт} = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_{экв}-0)^2+(0-0)^2+(0-\sigma_{экв})^2} = \frac{\sqrt{2}}{3}\sigma_{экв}$

$$\sigma_{экв} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2} \le [\sigma]} \qquad (33-4)$$

(5) Гипотеза О. Мора (экспериментальная)



$\frac{(\sigma_в)_р}{n} = [\sigma]_р$; $\frac{(\sigma_в)_с}{n} = [\sigma]_с$

Ур-е прямой AB

$\frac{\sigma_1}{[\sigma]_р} - \frac{\sigma_3}{[\sigma]_с} = 1 \quad \Big| \cdot [\sigma]_р$

$\sigma_1 - \frac{[\sigma]_р}{[\sigma]_с}\sigma_3 = [\sigma]_р \qquad k = \frac{[\sigma]_р}{[\sigma]_с}$

$$\boxed{\sigma_1 - k\sigma_3 \le [\sigma]_р} \qquad (33-5)$$

Во избежание лишних вычислений удобно выразить главные напряжения через

осевые. Тогда условия эквивалентности для последних трёх гипотез будут иметь вид:
3-я гипотеза:
$$\sigma_{экв} = \sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau_z^2} \le [\sigma]$$
4-я гипотеза:
$$\sigma_{экв} = \sqrt{\sigma_z^2 + 3\tau_z^2} \le [\sigma]$$
5-я гипотеза:
$$\sigma_{экв} = \frac{1-k}{2}\sigma_z + \frac{1+k}{2}\sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau_z^2} \le [\sigma]$$
В случае простых напряженных состояний (ЛНС, НСЧС) эти условия приводятся к знакомым нам соответствующим условиям прочности при простейших случаях деформирования.

(3) $\sigma_{экв} = \sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau_z^2} \le [\sigma]$

(4) $\sigma_{экв} = \sqrt{\sigma_z^2 + 3\tau_z^2} \le [\sigma]$

(5) $\sigma_{экв} = \frac{1-k}{2}\sigma_z + \frac{1+k}{2}\sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau_z^2} \le [\sigma]$

Тест в пн, вт (25, 26 декабря) с 0:00 до 23:59

Выложить лекции по § 3.7 – 3.9 на сайт