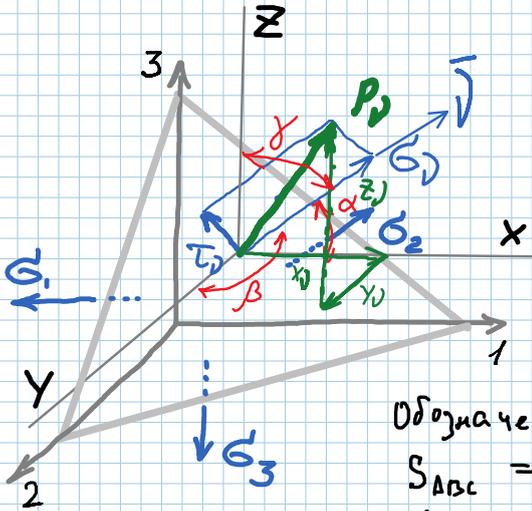


3.5. Определение напряжений в произвольно наклонённых площадках через главные напряжения

3.5.1. Общий случай



\vec{n} - нормаль

$$\begin{cases} l = \cos \alpha \\ m = \cos \beta \\ n = \cos \gamma \end{cases} \left. \begin{array}{l} \text{направляющие} \\ \text{косинусы} \end{array} \right\}$$

$P_D(x_D, y_D, z_D)$ - вектор полного напряжения

Обозначения площадей

$$S_{\Delta ABC} = dA$$

$$S_{\Delta AOC} = dA \cos \alpha$$

$$S_{\Delta AOB} = dA \cos \beta$$

$$S_{\Delta BOC} = dA \cos \gamma$$

Рассматриваем проекции на оси

$$X: \quad x_D dA = \sigma_1 dA \cos \alpha$$

$$Y: \quad y_D dA = \sigma_2 dA \cos \beta$$

$$Z: \quad z_D dA = \sigma_3 dA \cos \gamma$$

Т.е. $x_D = \sigma_1 \cos \alpha$

$y_D = \sigma_2 \cos \beta$

$z_D = \sigma_3 \cos \gamma$

$$P_D^2 = x_D^2 + y_D^2 + z_D^2$$

$$P_D^2 = (\sigma_1 \cos \alpha)^2 + (\sigma_2 \cos \beta)^2 + (\sigma_3 \cos \gamma)^2$$

Разложим P_D на нормаль и тангенциаль

$$\sigma_D dA = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2 \beta + \sigma_3 \cos^2 \gamma \quad (25)$$

$$\tau_D = \sqrt{P_D^2 - \sigma_D^2} \quad (26)$$

3.5.2. Представляют интерес следующие частные случаи

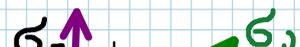
1) Напр-я в октаэдрических площадках (равнонаклонены к главным)

$$l = m = n = \frac{1}{\sqrt{3}}, \text{ т.к. } l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

$$\sigma_D = \sigma_{\text{окт}} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \sigma_c \quad (27); \quad \tau_D = \tau_{\text{окт}} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \quad (28)$$

2) Напряжения в площадках, параллельных одному из главных напряжений.

Рассмотрим площадку, параллельную σ_2



Рассмотрим площадку, параллельную σ_2

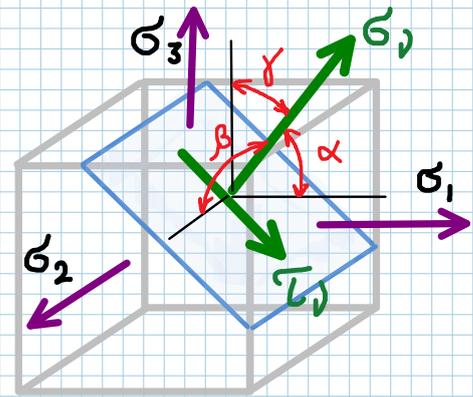
α - некоторый угол

$$\beta = \pi/2$$

$$\gamma = (\frac{\pi}{2} - \alpha)$$

$$\sigma_{\alpha} = \sigma_{\alpha} = \sigma_1 \cos^2 \alpha - \sigma_2 \sin^2 \alpha \quad (25a)$$

$$\tau_{\alpha} = \tau_{\alpha} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha \quad (26a)$$

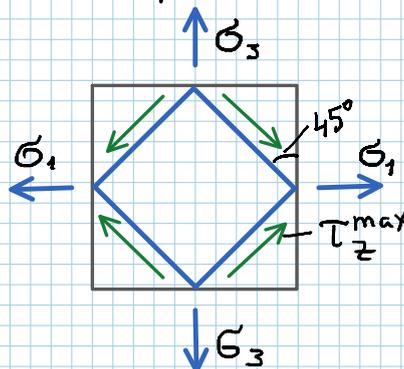


Т.е. если площадка \parallel одному из главных напряжений, это напряжение не входит в расчётные формулы, т.е. не оказывает влияния на величины нормальных и касательных напряжений.

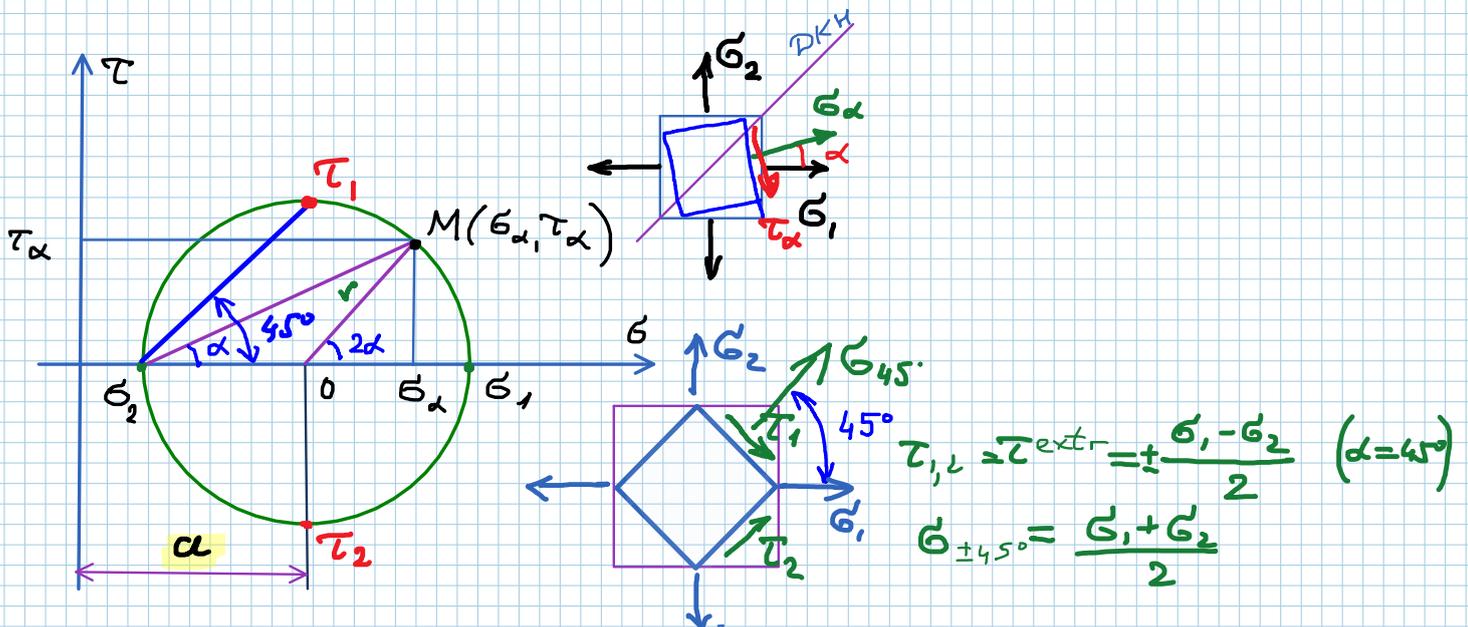
3) Максимальные касательные напряжения

из (26a), т.к. $-1 \leq \sin 2\alpha \leq 1$, $\tau_{\alpha}^{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$, т.е. $\sin 2\alpha = 1$; $2\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\alpha = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$

Т.о. макс касательные напряжения имеют место в площадках, расположенных под 45° к главным. При этом направление τ_{α}^{\max} идёт от меньшего напряжения к большему: $\sigma_3 \rightarrow \sigma_1$

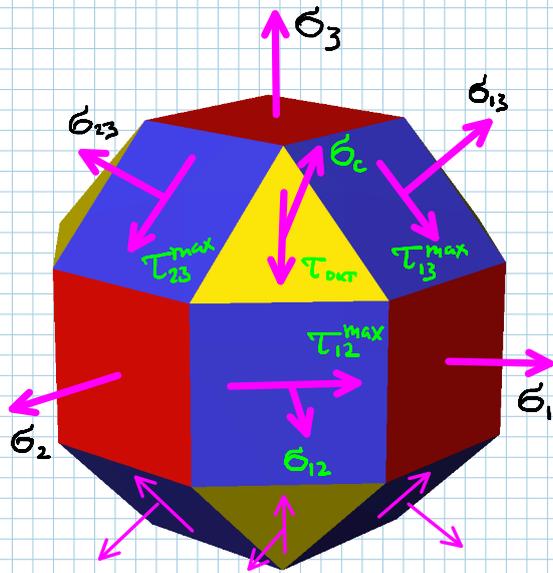


3.5.3. Решение задачи с помощью диаграммы Мора



3.5.4. Ромбокубооктаэдр и другие 26-гранники

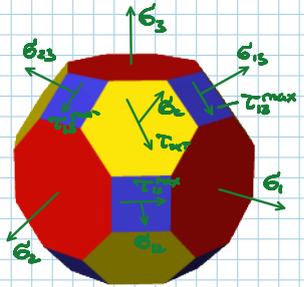
Рассмотренных особенностей площадки образуют 26-гранник в окрестности точки. Самая простая и наглядная из таких фигур - ромбокубооктаэдр.



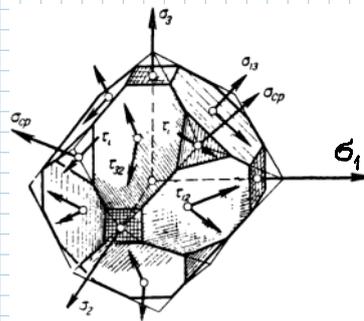
6-квадратов
12-с 6-уголниками
8-октаэдрич.

26

Вариант 26-гранника - усеченный кубооктаэдр



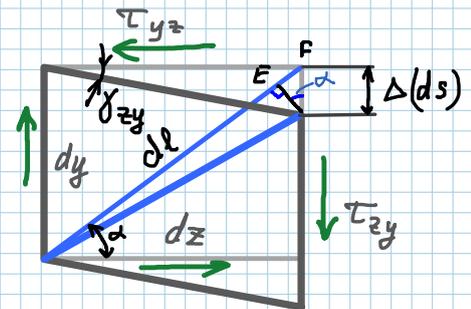
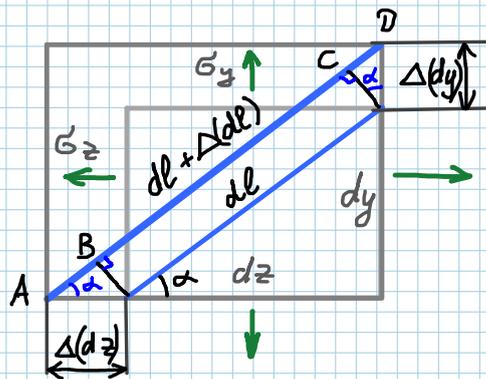
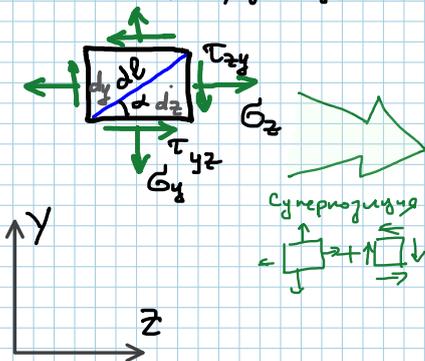
Еще вариант - гексаикосаэдр



- эту фигуру можно встретить в классических учебниках по ТУ и ТП и П

3.6. Основы теории деформации

Найдём деформацию диагонали малого элемента в ПНС



Диагональ удлинится на величину

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\Delta(dl)}{dl} \\ \epsilon_z &= \frac{\Delta(dz)}{dz} \rightarrow \Delta(dz) = \epsilon_z dz \\ \epsilon_y &= \frac{\Delta(dy)}{dy} \\ \gamma_{zy} &= \frac{\Delta(ds)}{dz} (= \text{tg } \delta_{zy}) \\ dz &= dl \cos \alpha \\ dy &= dl \sin \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta(dl) &= AB + CD - EF = \Delta(dz) \cos \alpha + \Delta(dy) \sin \alpha - \Delta(ds) \sin \alpha = \\ &= \epsilon_z dz \cos \alpha + \epsilon_y dy \sin \alpha - \gamma_{zy} dz \sin \alpha = \epsilon_z dl \cos^2 \alpha + \epsilon_y dl \sin^2 \alpha - \\ &\quad - \gamma_{zy} dl \cos \alpha \sin \alpha = \epsilon_z dl \cos^2 \alpha + \epsilon_y dl \sin^2 \alpha - \frac{\gamma_{zy}}{2} dl \sin 2\alpha \end{aligned}$$

$$\epsilon_\alpha = \frac{\Delta(dl)}{dl} = \epsilon_z \cos^2 \alpha + \epsilon_y \sin^2 \alpha - \frac{\gamma_{zy}}{2} \sin 2\alpha \quad (29)$$

Помним:

Полностью деформированное состояние в точке

$$dz = dl \cos \alpha$$

$$dy = dl \sin \alpha$$

$$2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha$$

Помним:

Полностью деформированное состояние в точке описывает тензор деформации:

$$T_d = [\varepsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{zx} & \frac{1}{2} \gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

Тензор симметричен:
 $\gamma_{xy} = \gamma_{yx}$ и т.д.

Вспомним тензор напряжения (полностью описывает напряженное состояние в точке):

$$T_n = [\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

$\tau_{xy} = \tau_{yx}$,
т.е. оба тензора имеют по шесть независимых компонентов

Сравнивая (29) и (21): формулы идентичны, компоненты T_n заменили компонентами T_d . Можно показать, что остальные ф-лы теории деформации также будут идентичными.

Тогда ф-ла угла сдвига

$$\gamma_\alpha = (\varepsilon_z - \varepsilon_y) \sin 2\alpha + \gamma_{zy} \cos 2\alpha \quad (30) \quad - \text{из (22)}$$

$$\varepsilon_3^1 = \frac{\varepsilon_z - \varepsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_z - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{zy}}{2}\right)^2} \quad (31) \quad - \text{из (24)}$$

- Осиловая деф-я в заданном направлении (30) и величины главных деф-й (31).