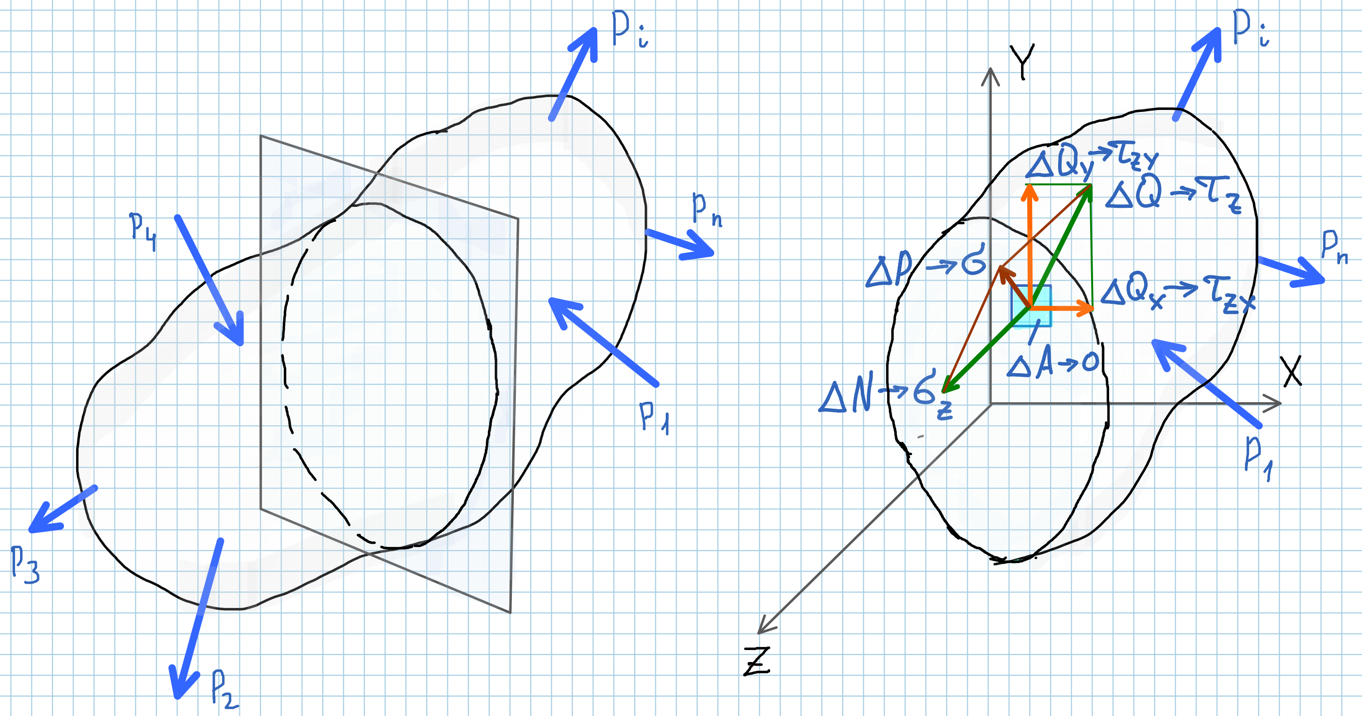
Лек.6. 1.12 Основные понятия

7 октября 2022 г.
11:30

1.12. Механическое напряжение и его компоненты



ВСФ - компоненты гл. вектора сил и гл. вектора моментов, которые, в свою очередь, являются равнодействующими сил упругости, возникающими между частицами материала как реакция на внешнюю нагрузку. Считая материал сплошным и однородным (см. гипотезы о свойствах материалов) найдем интенсивность распределения каждого силового фактора по сечению — какая доля внутреннего усилия приходится на малую (элементарную) площадку сечения

Если ΔP – сила (полная), приходящаяся на некоторую малую площадку ΔA, то

$$\lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta A} = \frac{dP}{dA} = \sigma$$ – вектор полного напряжения

Как и в случае с ВСФ, удобно разложить его на компоненты:

$$\lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta N_z}{\Delta A} = \frac{dN_z}{dA} = \sigma_z$$ – нормальное напряжение

$$\left.\begin{aligned} \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta Q_x}{\Delta A} = \frac{dQ_x}{dA} = \tau_{zx} \\ \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta Q_y}{\Delta A} = \frac{dQ_y}{dA} = \tau_{zy} \end{aligned}\right\}$$ составляющие касательного напряжения τ_z

Напряжение – интенсивность (т.е. величина усилия, приходящаяся на единицу площади) распределения внутренних сил по сечению.

Нормальное напряжение σ имеет один индекс, который показывает, параллельно какой оси оно действует.

Касательное напряжение имеет двойной индекс. Первый показывает направление нормали к площадке, второй – параллельно какой оси действует это напряжение.

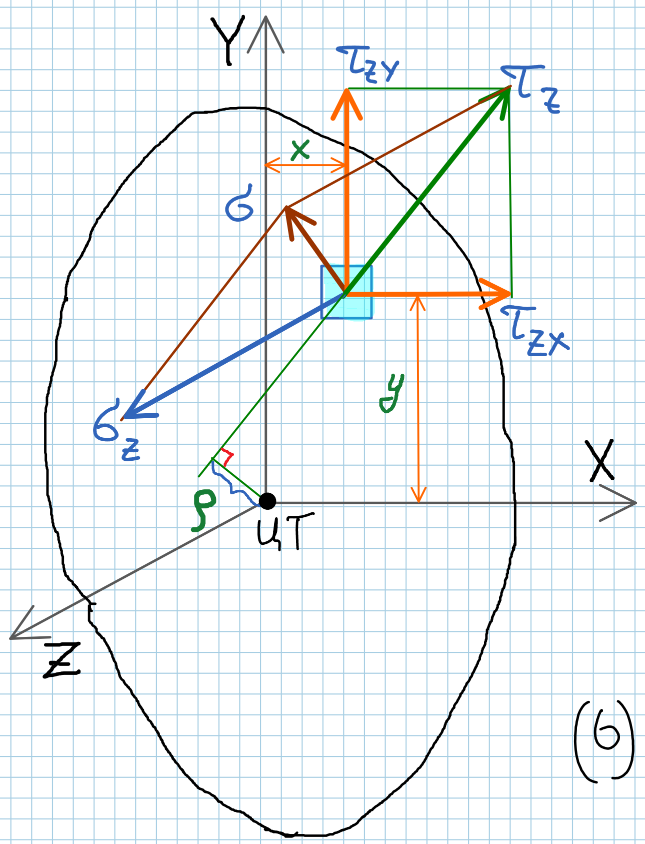
Резюмируем:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_z &= \frac{dN_z}{dA} \\ \tau_{zx} &= \frac{dQ_x}{dA} \\ \tau_{zy} &= \frac{dQ_y}{dA} \end{aligned}\right\} (4)$$

Обратная операция:

$$\left.\begin{aligned} dN_z &= \sigma_z dA \rightarrow N_z = \int_A \sigma_z dA \\ dQ_x &= \tau_{zx} dA \rightarrow Q_x = \int_A \tau_{zx} dA \\ dQ_y &= \tau_{zy} dA \rightarrow Q_y = \int_A \tau_{zy} dA \end{aligned}\right\} (5)$$

Величина вн. сил. ф. $N_z/Q_x/Q_y$ равна алгебраической сумме внутренних сил, действующих в элементарных площадках сечения в направлении соответствующих осей (Z/X/Y).



Про моменты

Моменты в каждой элементарной площадке будут →0 вследствие малости площадки. То есть, любой момент – это не сумма моментов в элементарных площадках.

А что же?

Это сумма моментов внутренних сил (напряжений), действующих в элементарных площадках, относительно соотв. оси!

Т.е. напряжение на плечо до Ц.Т.

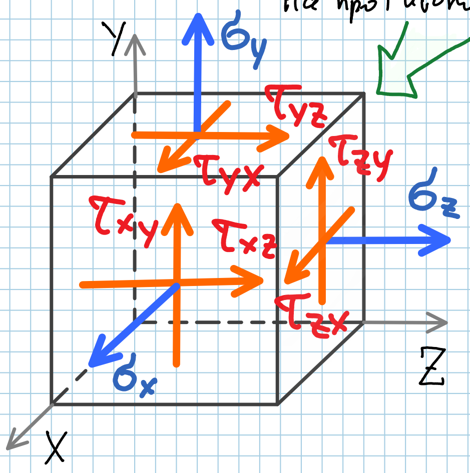
$$(6)\begin{cases} M_z = \int_A (\tau_{zy} \cdot x - \tau_{zx} \cdot y)\, dA = \int_A \tau_z \cdot \rho \cdot dA \\ M_x = \int_A \sigma_y \cdot y \cdot dA \\ M_y = \int_A \sigma_x \cdot x \cdot dA \end{cases}$$

1.13. Тензор напряжений. Закон парности касательных напряжений

Совокупность нормальных и касательных напряжений в окрестности точки деформируемого тела называют напряженным состоянием в данной точке. Оно описывается т.н. тензором напряжений (объект линейной алгебры, от лат. tensus – – "напряженный")

? Тензор и матрица – в чем разница? (матрица – таблица произв. чисел, компоненты тензора связаны)

На противопол. гранях – такие же напр-я, но противопол. направл-я



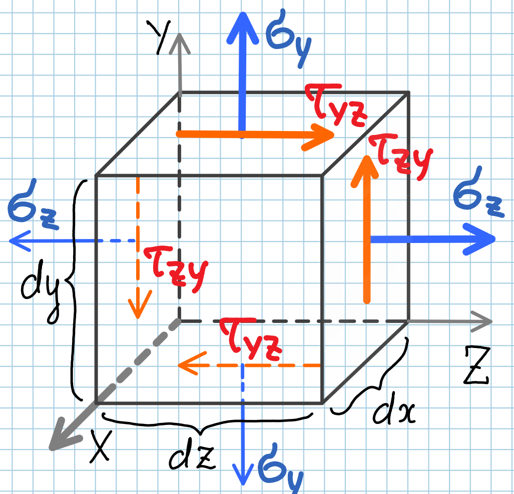
Тензор напряжений

$$\sigma_{ij} = T_н = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \qquad i, j = x, y, z$$

Т.н. симметричен относит. гл. диагонали:

$$\left.\begin{aligned} \tau_{xy} &= \tau_{yx} \\ \tau_{yz} &= \tau_{zy} \\ \tau_{zx} &= \tau_{xz} \end{aligned}\right\} (7)$$

Это следует из условий равновесия элементарного параллелепипеда



Покажем это. Составим ур-е равновесия отн. X:

$$\sum mom_x = 0$$

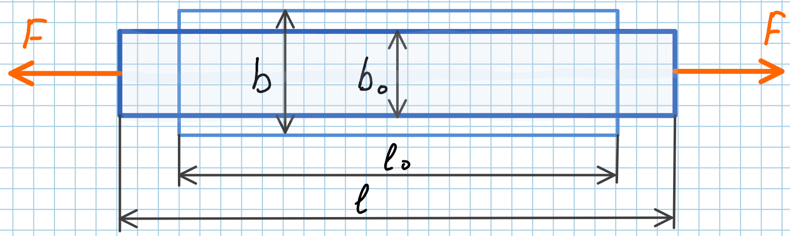
$$\left.\begin{aligned} &\cancel{\sigma_z \cdot dx \cdot dy \cdot \frac{dy}{2}} - \cancel{\sigma_z \cdot dx \cdot dy \cdot \frac{dy}{2}} + \\ &+ \cancel{\sigma_y \cdot dx \cdot dz \cdot \frac{dz}{2}} - \cancel{\sigma_y \cdot dx \cdot dz \cdot \frac{dz}{2}} + \end{aligned}\right\} \text{норм напр-я в сумме не создают момент}$$

$$+ \underbrace{\underbrace{\tau_{zy}}_{\text{интенсивность нагрузки}} \cdot \underbrace{dx \cdot dy}_{dA \text{ - эл. площадка}}}_{\text{равнодействующая сила}} \cdot \underbrace{dz}_{\text{плечо}} - \tau_{yz} \cdot dx \cdot dz \cdot dy = 0$$

Т.к. множитель $dxdydz$ присутствует в обоих последних слагаемых, приходим к равенству $\tau_{zy} = \tau_{yz}$. Аналогично составляя ур-я равновесия относит. осей Y и Z, получим остальные равенства (7). Т.о. касат. напр-я на двух взаимно перпендикулярных площадках равны по величине и направлены к общему ребру или от него (закон парности касательных напряжений).

1.14. Деформация. Виды деформации

1) Линейная деформация



l_0, b_0 – начальные размеры образца

l, b – размеры после приложения нагрузки

$\Delta l = l - l_0$ – абсолютная линейная деформация (удлинение/укорочение)

Δl выражается в единицах длины (м) и не характеризует, насколько сильно деформировалось тело, т.к. зависит от его размеров.

Поэтому эффективнее использовать относительную безразмерную величину, которая показывает, какую часть от первоначального размера образца составила абсолютная деформация:

$$\varepsilon = \frac{|l - l_0|}{l_0} = \frac{\Delta l}{l_0} \quad (8)$$ – относительная линейная деформация (относительное удлинение/укорочение)

При растяжении (сжатии) образца (детали) в поперечном направлении также наблюдается деформация – поперечное сужение (расширение):

$$\varepsilon' = \frac{|b - b_0|}{b_0} = \frac{\Delta b}{b_0} \quad (9)$$

ε часто выражают в процентах: $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} \cdot 100\%$, например, $\varepsilon = 0{,}05 = 5\%$

Опытным путём установлено, что в пределах упругих деформаций отношение поперечной деформации к продольной является постоянной величиной для каждого материала:

$$\frac{\varepsilon'}{\varepsilon} = \nu = const$$

Также часто обозначают μ

Эта величина называется коэффициент поперечной деформации или коэффициент Пуассона.

Для справки:

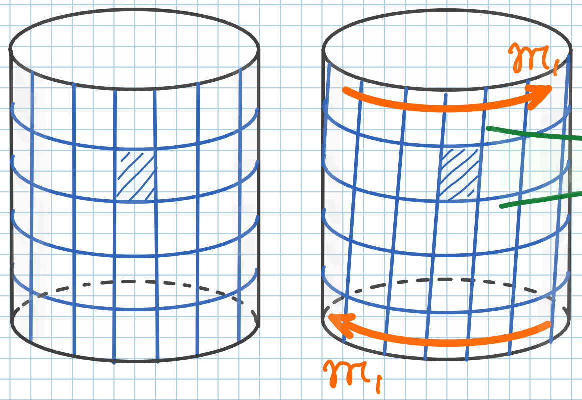
Материал	ν
Сталь	0,25 - 0,33
Медь	0,31 - 0,34
Бронза	0,32 – 0,35
Алюминий	0,32 - 0,36
Чугун	0,23 - 0,27
Камень	0,16 - 0,34
Бетон	0,08 - 0,18
Фанера	0,07
Пробка	≈ 0

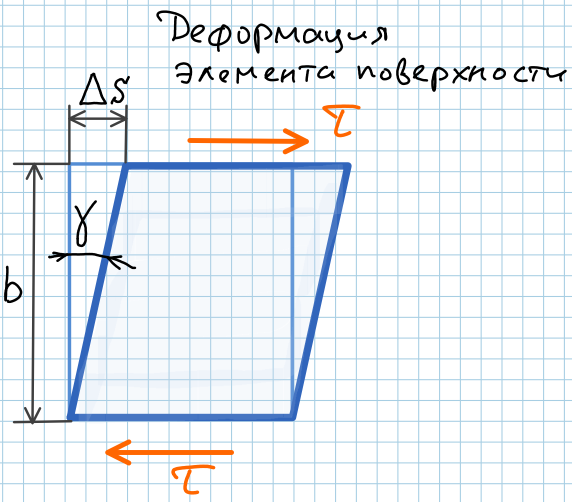
К-т Пуассона всегда лежит в пределах

$$0 \le \nu \le 0{,}5.$$

Является важной механической характеристикой материала, описывающей его упругие свойства.

2) Угловая деформация





Мерой угловой деформации является угол сдвига γ.

Вследствие малости деформации $tg\gamma \simeq \gamma = \dfrac{\Delta S}{b}$

Деформированное состояние в точке полностью описывает тензор деформации Коши (тензор малых деформаций):

$$\varepsilon_{ij} = T_Д = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{yx}}{2} & \varepsilon_y & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{zx}}{2} & \frac{\gamma_{zy}}{2} & \varepsilon_z \end{pmatrix}$$

$i, j = x, y, z$

Т.Д. также симметричен: $\gamma_{ij} = \gamma_{ji}$