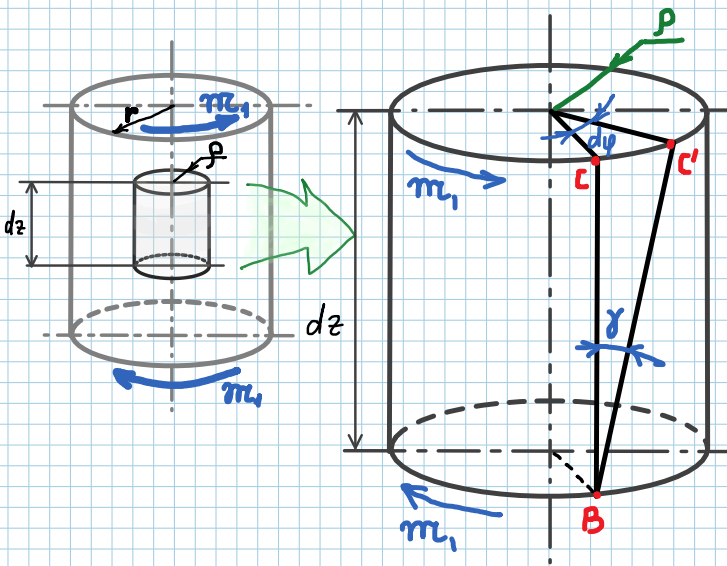


2.3. Кручение брусев круглого сечения



1. Г.С.: Сечения повернулись друг относительно друга на некоторый (малый) центральный угол $d\varphi$.

Рассмотрим деформацию элемента dz
 $CC' = \rho d\varphi = dz \cdot \gamma$

отсюда $\gamma = \rho \frac{d\varphi}{dz}$ - угловая деформация
 линейная деформация $\epsilon_z = 0$ - т.к. $d\varphi$ мал

2. Ф.С.: $\tau_z = G\gamma = G\rho \frac{d\varphi}{dz}$ (*)

$$\epsilon_z = E\epsilon_z = 0$$

3. С.С.: $M_z = \int_A \tau_z \rho dA =$

$$= \int_A G\rho \frac{d\varphi}{dz} \rho dA = G \frac{d\varphi}{dz} \underbrace{\int_A \rho^2 dA}_{J_p} = G J_p \frac{d\varphi}{dz} (**)$$

$$\left. \begin{aligned} M_z &= G J_p \frac{d\varphi}{dz} \\ \tau_z &= G \rho \frac{d\varphi}{dz} \end{aligned} \right\} \tau_z = \frac{M_z}{J_p} \rho \quad (15)$$

(15) - формула для определения касательных напряжений при кручении брусев круглого сечения

Они распределены по линейному закону: $\tau_z = f(\rho) = k\rho$ перпендикулярно радиусу.

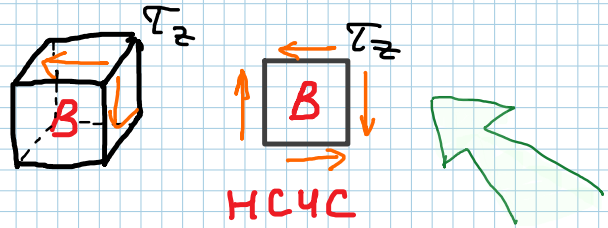
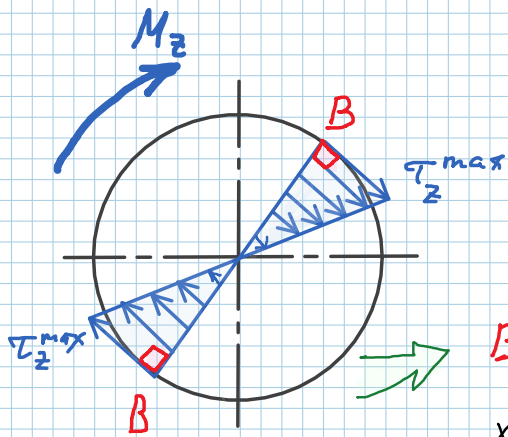
Для определения опасной точки строим эпюру напряжений в поперечном сечении

Эпюра напряжений

из (15): @ $\rho = 0 \rightarrow \tau_z = 0$

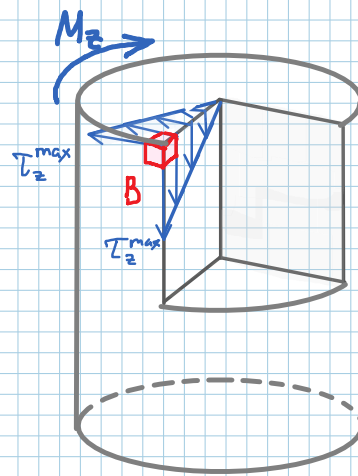
@ $\rho = \rho_{max} = r \quad \tau_z = \tau_z^{max} = \frac{M_z}{J_p} \rho_{max} = \frac{M_z}{J_p} r = \frac{M_z}{W_p}$

$W_p = \frac{J_p}{\rho_{max}}$ - полярный момент сопротивления



B - опасная точка (любая точка на поверхности).
 Напряжённое состояние в опасной точке характеризуется наличием только касат. напряжений и называется напряжённое состояние чистого сдвига.

По закону парности касательных напряжений, τ_z имеет место и в продольных сечениях бруса.



Угол закручивания (угловое перемещение):

$$\text{из (**) } M_z = GJ_p \frac{d\varphi}{dz} \rightarrow d\varphi = \frac{M_z dz}{GJ_p}; \quad \varphi = \int_0^l \frac{M_z dz}{GJ_p} = \frac{M_z l}{GJ_p}$$

Если $M = \text{const}$
 $GJ_p = \text{const}$

GJ_p - жесткость при кручении

О полярном моменте сопротивления $W_p = \frac{J_p}{\rho_{\max}}$

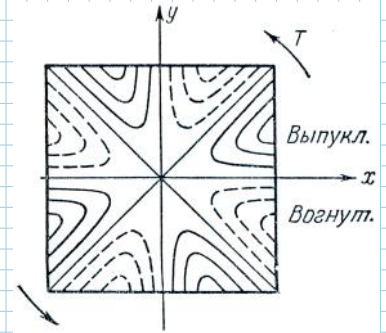
Круг $W_p = \frac{\frac{\pi D^4}{32}}{\frac{D}{2}} = \frac{\pi D^3}{16}$

Кольцо $W_p = \frac{\frac{\pi D^4}{32} (1 - \alpha^4)}{\frac{D}{2}} = \frac{\pi D^3}{16} (1 - \alpha^4)$, где $\alpha = \frac{d}{D}$

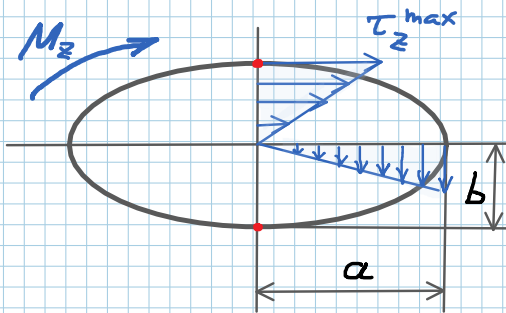
Полярный момент сопротивления - не интегральная величина $W_{p\Sigma} \neq \sum W_{pi}$

2.4. Кручение брусев некруглого сечения

Гипотеза плоских сечений здесь неприменима.
 Возьмём формулы из теории упругости (без вывода).



1. Брусья эллиптического сечения

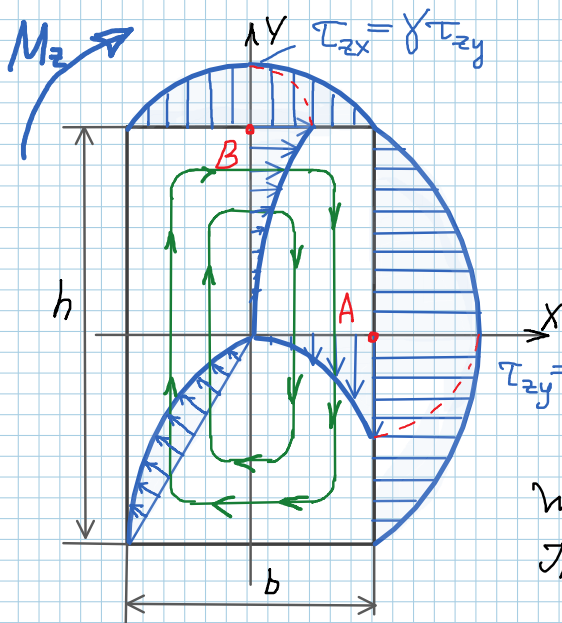


τ_z^{\max} — в крайних точках малой оси

$$\tau_z^{\max} = \frac{M_z}{W_k}$$

$W_k = \frac{\pi a b^2}{2}$ — момент сопротивления кручению эллиптического сечения

2. Брус прямоугольного сечения



$$\tau_B = \gamma \tau_A$$

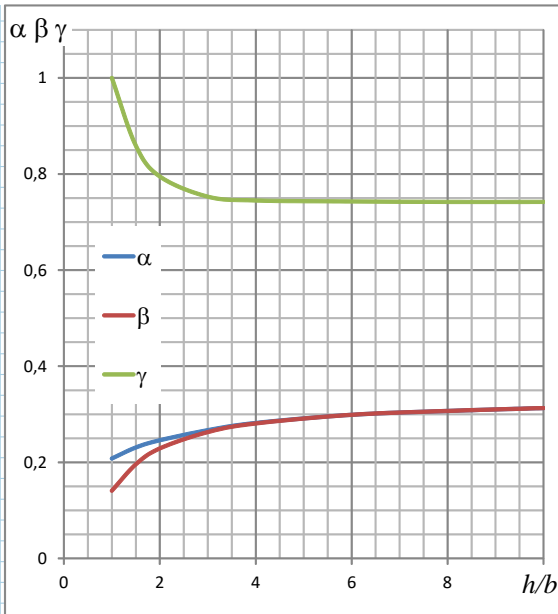
$$\tau_{zx} = \gamma \tau_{zy}$$

$$\tau_{zy} = \tau_z^{\max} = \frac{M_z}{W_k}$$

$$\tau_{zy} = \tau_z^{\max} = \frac{M_z}{W_k}$$

$W_k = \alpha h b^2$ — момент сопротивления кручению

$J_k = \beta h b^3$ — момент инерции некручено сечения при кручении



h/b	1	1,5	2	3	4	6	8	10	
alpha	0,208	0,231	0,246	0,267	0,282	0,299	0,307	0,313	0,333
beta	0,141	0,196	0,229	0,263	0,281	0,299	0,307	0,313	0,333
gamma	1	0,859	0,795	0,753	0,745	0,743	0,742	0,742	0,742

→
→

Т.о. для треугольника с $\frac{h}{b} > 10$ $\alpha = \beta = \frac{1}{3}$,
и $W_k = \frac{hb^2}{3}$; $J_p = \frac{hb^3}{3}$.

Угол закручивания (угловое перемещение)
свободного конца вала длиной l :

$$\varphi = \frac{M_z l}{GJ_k} \quad (\text{при } M_z, GJ_k = \text{const})$$

GJ_k — жесткость бруса некруглого сечения при кручении

Для сечений с $h \gg b$ картина τ_z показана на рис.

