

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«НИЖЕГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ им. Р.Е. АЛЕКСЕЕВА»

Кафедра «Аэро-гидродинамика, прочность машин  
и сопротивление материалов»

## **Анализ напряжённо-деформированного состояния в точке твёрдого тела**

Методические указания к выполнению курсовой работы по дисциплине  
«Механика сплошных сред» для студентов, обучающихся  
по направлению 15.03.03 «Прикладная механика»  
дневной формы обучения

Версия от 10.10.16 г. (v11), исправленная и дополненная.  
Предыдущие версии методических указаний  
использовать с учетом данных изменений.

Нижний Новгород, 2016

Составитель А. Е. Жуков

УДК 531, 539.3

**Анализ напряжённо-деформированного состояния в точке твёрдого тела:** метод. указания к выполнению курсовой работы по дисциплине «Механика сплошных сред» для студентов, обучающихся по направлению 15.03.03 «Прикладная механика» дневной формы обучения / НГТУ им. Р. Е. Алексеева; сост.: А. Е. Жуков. Н. Новгород, 2016. – 12 с.

Методические указания предназначены для студентов направления подготовки 15.03.03 «Прикладная механика» ИТС НГТУ им. Р. Е. Алексеева. Дано задание для курсовой работы по дисциплине «Механика сплошных сред», приведён подробный алгоритм её выполнения.

Редактор Э. Б. Абросимова

Подписано в печать 25.03.2016. Формат 60×84<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бумага офсетная.

Печать офсетная. Усл. печ. л. 0,75. Тираж 100 экз. Заказ \_\_\_\_\_.

---

Нижегородский государственный технический университет им. Р. Е. Алексеева.

Типография НГТУ.

Адрес университета и полиграфического предприятия:  
603950, Нижний Новгород, ул. Минина, 24.

© Нижегородский государственный  
технический университет  
им. Р.Е. Алексеева, 2016

## Оглавление

Введение.....	4
Задание .....	4
Содержание работы.....	4
Указания по выполнению работы .....	5
1. Определение величин главных деформаций и положение главных осей деформации.....	5
2. Определение модуля и интенсивности деформации .....	7
3. Определение деформации на октаэдрической площадке .....	8
4. Определение экстремальных деформаций сдвига и площадок, на которых они действуют, а также линейных деформаций на этих площадках.....	8
5. Определение $\epsilon_v$ и $\gamma_\tau$ для заданного направления.....	9
6. Построение диаграммы деформаций Мора .....	9
7. Определение тензора напряжений.....	11
8. Определение области деформирования .....	12
Список литературы.....	12

## Введение

Настоящие методические указания предназначены для студентов третьего курса, обучающихся по направлению 15.03.03 «Прикладная механика», и ставят своей целью оказание помощи при выполнении курсовой работы «Анализ напряженно-деформированного состояния в точке твёрдого тела» по дисциплине «Механика сплошных сред». Указания содержат последовательность выполнения вычислений, рекомендована практическая расчетная схема.

Цель курсовой работы – решение задачи анализа напряжённо-деформированного состояния материала в наиболее опасных зонах конструкции машин.

Основы теории напряженно-деформированного состояния материала твердого тела, необходимые для выполнения данной работы, изложены в учебном пособии В. М. Волкова «Основы механики деформированного твёрдого тела» [1].

## Задание

Для заданного тензора деформаций Коши (задаётся преподавателем) определить:

- 1) главные деформации и их направления;
- 2) модуль и интенсивность деформации;
- 3) деформации на октаэдрической площадке;
- 4) экстремальные деформации сдвига, площадки, между которыми происходит угловая деформация, а также деформацию растяжения-сжатия на этих площадках;
- 5) вычислить  $\epsilon_v$  и  $\gamma_\tau$  для направления  $\mathbf{r}$  ( $n_1 = \cos \alpha_1$ ,  $n_2 = \cos \alpha_2$ ) через  $\epsilon_i$  ( $i = 1, 2, 3$ );
- 6) показать на диаграмме деформаций Мора  $\epsilon_i$ ,  $\gamma_\tau^{\text{extr}}$ ;  $\gamma_\tau^r$ ,  $\epsilon_v^r$
- 7) по заданному тензору Коши и главным линейным деформациям определить тензор напряжений Эйлера для упругого изотропного тела при  $E = 2 \times 10^5$  МПа,  $\mu = 0,3$ ), показать эти напряжения на гранях куба;
- 8) определить из сравнения величин  $\sigma_n$  и  $\sigma_\tau$  в какой области деформирования (упругой или упругопластической) находится материал ( $\sigma_\tau$  задаётся преподавателем).

## Содержание работы

Курсовая работа должна включать:

- Содержание.
- Задание к курсовой работе.
- Выполненные разделы задания (1–8).
- Список литературы.

## Указания по выполнению работы

### 1. Определение величин главных деформаций и положение главных осей деформации.

Тензор Коши имеет вид:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \frac{1}{2}\varepsilon_{12} & \frac{1}{2}\varepsilon_{13} \\ \frac{1}{2}\varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \frac{1}{2}\varepsilon_{23} \\ \frac{1}{2}\varepsilon_{31} & \frac{1}{2}\varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}.$$

Подставим исходные данные и запишем тензор Коши в численном виде. Вычислим среднюю линейную деформацию:

$$\varepsilon_c = \frac{1}{3}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}).$$

Девiator деформаций запишется в виде:

$$e_{ij} = \begin{pmatrix} e_{11} & \frac{1}{2}e_{12} & \frac{1}{2}e_{13} \\ \frac{1}{2}e_{21} & e_{22} & \frac{1}{2}e_{23} \\ \frac{1}{2}e_{31} & \frac{1}{2}e_{32} & e_{33} \end{pmatrix},$$

где  $e_{ii} = \varepsilon_{ii} - \varepsilon_c$ ;  $e_{ij} = \varepsilon_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3; i \neq j$ ).

Теперь можем составить кубическое уравнение для нахождения главных девиаторных деформаций:

$$-e^3 + H_{2\Delta}e + H_{3\Delta} = 0,$$

где

$$H_{2\Delta} = \frac{1}{2} \left[ e_{11}^2 + e_{22}^2 + e_{33}^2 + \frac{1}{2}(e_{12}^2 + e_{23}^2 + e_{31}^2) \right] \quad \text{— квадратичный инвариант}$$

девиатора,

$$H_{3\Delta} = \left[ e_{11}e_{22}e_{33} + \frac{1}{4}e_{12}e_{23}e_{31} - \frac{1}{4}(e_{11}e_{23}^2 + e_{22}e_{13}^2 + e_{33}e_{12}^2) \right] \quad \text{— кубический ин-}$$

вариант девиатора.

Данное уравнение не будет иметь мнимых или комплексных корней в силу симметрии тензора Коши, то есть все корни будут вещественными. Его можно решить, например, с помощью итерационного метода или с привлечением специального математического программного обеспечения.

Найденные корни упорядочиваем в соответствии с неравенством:  $e_1 \geq e_2 \geq e_3$ , причём можно убедиться, что  $e_1 + e_2 + e_3 = 0$ .

Определим главные линейные деформации по формуле

$$\varepsilon_i = e_i + \varepsilon_c, \quad (i = 1, 2, 3).$$

Линейный инвариант тензора деформации определится выражениями:

$$H_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3,$$

$$H_1 = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}.$$

Следует вычислить  $H_1$  обоими способами и убедиться, что результаты совпадают.

Для определения направлений главных осей деформаций запишем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} (\varepsilon_{11} - \varepsilon_i)n_{i1} + \frac{1}{2}\varepsilon_{12}n_{i2} + \frac{1}{2}\varepsilon_{13}n_{i3} = 0; \\ (\varepsilon_{11} - \varepsilon_i)n_{i3} + \frac{1}{2}\varepsilon_{31}n_{i1} + \frac{1}{2}\varepsilon_{32}n_{i2} = 0; \\ n_{i1}^2 + n_{i2}^2 + n_{i3}^2 = 1. \end{cases}$$

Введём обозначения:

$$\frac{n_{i1}}{n_{i3}} = a_i; \quad \frac{n_{i2}}{n_{i3}} = b_i; \quad n_{i3} = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + a_i^2 + b_i^2}}.$$

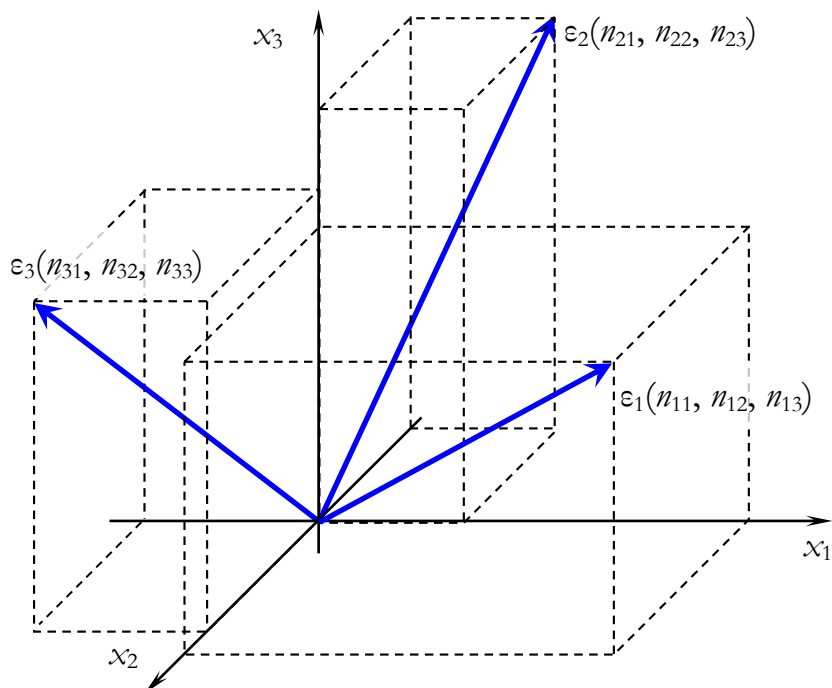


Рис. 1. Направления главных деформаций

Тогда система запишется следующим образом:

$$\begin{cases} (\varepsilon_{11} - \varepsilon_i) a_i + \frac{1}{2} \varepsilon_{12} b_i = -\frac{1}{2} \varepsilon_{13}; \\ \frac{1}{2} \varepsilon_{31} a_i + \frac{1}{2} \varepsilon_{12} b_i = -(\varepsilon_{33} - \varepsilon_i), \end{cases}$$

а её корни будут равны

$$a_i = \frac{\frac{1}{2} \varepsilon_{12} (\varepsilon_{33} - \varepsilon_i) - \frac{1}{4} \varepsilon_{31} \varepsilon_{23}}{\frac{1}{2} \varepsilon_{23} (\varepsilon_{11} - \varepsilon_i) - \frac{1}{4} \varepsilon_{12} \varepsilon_{31}}; \quad b_i = \frac{\frac{1}{4} \varepsilon_{31}^2 - (\varepsilon_{11} - \varepsilon_i) (\varepsilon_{33} - \varepsilon_i)}{\frac{1}{2} \varepsilon_{23} (\varepsilon_{11} - \varepsilon_i) - \frac{1}{4} \varepsilon_{12} \varepsilon_{31}}.$$

Подставляя найденное ранее  $\varepsilon_1$ , найдем  $a_1$  и  $b_1$ , после чего можем вычислить  $n_{13}$ , а затем  $n_{11}$  и  $n_{12}$ :

$$n_{11} = a_1 n_{13}; \quad n_{12} = b_1 n_{13}.$$

Таким образом, получили направление  $\varepsilon_1(n_{11}, n_{12}, n_{13})$ .

Проверить правильность найденных значений направляющих косинусов можно по тождеству:  $n_{11}^2 + n_{12}^2 + n_{13}^2 = 1$ .

Действуя аналогично с величинами  $\varepsilon_2$  и  $\varepsilon_3$ , найдем остальные направления осей главных деформаций  $\varepsilon_2(n_{21}, n_{22}, n_{23})$  и  $\varepsilon_3(n_{31}, n_{32}, n_{33})$ , причем, как и в предыдущем случае, следует убедиться, что  $n_{21}^2 + n_{22}^2 + n_{23}^2 = 1$ , и  $n_{31}^2 + n_{32}^2 + n_{33}^2 = 1$ .

Полученные направления главных деформаций должны быть ортогональны:

$$\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \perp \varepsilon_3 \rightarrow n_{i1} n_{j1} + n_{i2} n_{j2} + n_{i3} n_{j3} = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3; i \neq j).$$

То есть, нужно проверить условия:

$$\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \rightarrow n_{11} n_{21} + n_{12} n_{22} + n_{13} n_{23} = 0,$$

$$\varepsilon_2 \perp \varepsilon_3 \rightarrow n_{21} n_{31} + n_{22} n_{32} + n_{23} n_{33} = 0,$$

$$\varepsilon_3 \perp \varepsilon_1 \rightarrow n_{31} n_{11} + n_{32} n_{12} + n_{33} n_{13} = 0.$$

Будем считать эти равенства выполненными тождественно, если результат вычислений не превышает 0,1% от максимального значения  $n_{ij}$ .

Откладывая найденные значения в декартовой системе координат, изобразим направления осей главных деформаций (рис. 1).

## 2. Определение модуля и интенсивности деформации

Модуль деформации вычисляется по формуле

$$\varepsilon_M = \sqrt{\frac{1}{2} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij}} = \sqrt{H_{2\Delta}},$$

где  $H_{2\Delta}$  — квадратичный инвариант девиатора деформации, найденный в п. 1.

Интенсивность деформации определяется выражением

$$\epsilon_H = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\epsilon_{11} - \epsilon_{22})^2 + (\epsilon_{22} - \epsilon_{33})^2 + (\epsilon_{33} - \epsilon_{11})^2 + \frac{3}{2}(\epsilon_{12}^2 + \epsilon_{23}^2 + \epsilon_{31}^2)}.$$

После некоторых преобразований можно получить:

$$\epsilon_H = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{3\left(\epsilon_{11}^2 + \epsilon_{22}^2 + \epsilon_{33}^2 + \frac{1}{2}(\epsilon_{12}^2 + \epsilon_{23}^2 + \epsilon_{31}^2)\right)} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{2H_{2\Delta}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{H_{2\Delta}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \epsilon_M.$$

Следует вычислить  $\epsilon_H$  обоими способами (через  $\epsilon_{ij}$  и  $\epsilon_M$ ) и убедиться, что результаты совпадают.

### 3. Определение деформации на октаэдрической площадке

Октаэдрическая угловая деформация определяется выражением

$$\gamma_{\text{окт}} = \frac{1}{3} \sqrt{(\epsilon_1 - \epsilon_2)^2 + (\epsilon_2 - \epsilon_3)^2 + (\epsilon_3 - \epsilon_1)^2},$$

или же  $\gamma_{\text{окт}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \epsilon_H.$

Следует вычислить  $\gamma_{\text{окт}}$  по обеим формулам и убедиться, что полученные значения совпадают.

Линейная октаэдрическая деформация:

$$\epsilon_{\text{окт}} = \frac{1}{3}(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3) = \epsilon_c.$$

Относительная объемная деформация:

$$\theta = H_1 = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = 3\epsilon_c.$$

### 4. Определение экстремальных деформаций сдвига и площадок, на которых они действуют, а также линейных деформаций на этих площадках

По найденным главным деформациям можно определить экстремальные деформации ( $i, j = 1, 2, 3; i \neq j$ ):

$$\gamma_{\tau}^{ij \text{extr}} = \frac{\epsilon_i - \epsilon_j}{2} \text{ — экстремальные деформации чистого сдвига;}$$

$$\epsilon_{\nu}^{ij} = \frac{\epsilon_i + \epsilon_j}{2} \text{ — линейные деформации на площадках экстремального сдвига.}$$

Таким образом, находим величины  $\gamma_{\tau}^{12 \text{extr}}, \epsilon_{\nu}^{12}, \gamma_{\tau}^{23 \text{extr}}, \epsilon_{\nu}^{23}, \gamma_{\tau}^{31 \text{extr}}, \epsilon_{\nu}^{31}$ . Расположение площадок экстремального сдвига показано на рис. 2. В работе следует изобразить площадки и подписать найденные значения экстремальных сдвиговых деформаций и линейных деформаций на этих площадках.



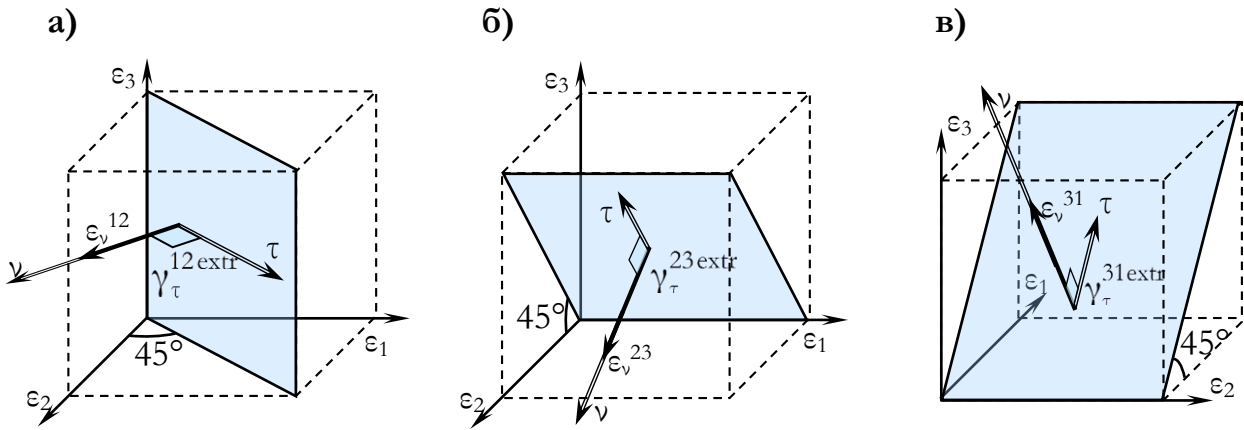


Рис. 2. Площадки экстремального сдвига

## 5. Определение $\epsilon_v$ и $\gamma_\tau$ для заданного направления

Пусть задано направление  $\mathbf{r}$  ( $n_1 = \cos \alpha_1$ ,  $n_2 = \cos \alpha_2$ ).

Линейная деформация в заданном направлении определится выражением

$$\epsilon_v = \epsilon_1 n_1^2 + \epsilon_2 n_2^2 + \epsilon_3 n_3^2,$$

где  $n_1 = \cos \alpha_1$ ,  $n_2 = \cos \alpha_2$ ,  $n_3 = \sqrt{1 - n_1^2 - n_2^2}$

Угловая деформация между  $\bar{v}$  и  $\bar{\tau}$ :

$$\gamma_\tau = \sqrt{\epsilon_1^2 n_1^2 + \epsilon_2^2 n_2^2 + \epsilon_3^2 n_3^2 - \epsilon_v^2}.$$

## 6. Построение диаграммы деформаций Мора

Деформированное состояние элементарного отрезка в окрестности некоторой точки тела можно изобразить в виде точки на плоскости  $\epsilon_v$ ,  $\gamma_\tau$ . Совокупность точек деформации образует круговую диаграмму Мора (рис. 3).

Диаграмма деформаций в данной работе будет являться в некотором роде графической проверкой правильности вычислений, проведенных в предыдущих пунктах.

Исходными данными для построения будут являться найденные ранее  $\gamma_\tau^{12extr}$ ,  $\epsilon_v^{12}$ ,  $\gamma_\tau^{23extr}$ ,  $\epsilon_v^{23}$ ,  $\gamma_\tau^{31extr}$ ,  $\epsilon_v^{31}$ ,  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$ ,  $\epsilon_3$ , и заданные углы  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ . Угол  $\alpha_3$  найдем из тождества  $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$ , где  $n_1 = \cos \alpha_1$ ,  $n_2 = \cos \alpha_2$ ,  $n_3 = \cos \alpha_3$ , то есть,  $\alpha_3 = \arccos n_3 = \arccos \sqrt{1 - n_1^2 - n_2^2}$ .

Будем строить диаграмму в следующем порядке.

- 1) нарисуем оси  $\varepsilon_v$ ,  $\gamma_\tau$  и построим три полуокружности с центрами в точках  $\varepsilon_v^{12}$ ,  $\varepsilon_v^{23}$ ,  $\varepsilon_v^{31}$  и радиусами  $\gamma_\tau^{12extr}$ ,  $\gamma_\tau^{23extr}$ ,  $\gamma_\tau^{31extr}$ . Обозначим эти точки и радиусы на схеме. Абсциссы точек касания полуокружностей друг с другом должны соответствовать величинам главных деформаций  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ ,  $\varepsilon_3$ , причём  $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3$ ;
- 2) отложим из точки  $\varepsilon_2$  лучи  $\varepsilon_2A$  и  $\varepsilon_2B$  под углами  $\alpha_1$  и  $\alpha_3$  соответственно (буквами A и B обозначим точки пересечения лучей с малыми полуокружностями);
- 3) построим дуги с радиусами  $\varrho_1 = \varepsilon_{23}B$  и  $\varrho_2 = \varepsilon_{12}A$ . Координаты точки пересечения окружностей и будут являться искомыми  $\varepsilon_v^r$  и  $\gamma_\tau^r$  для заданного направления  $r$ . Величины данных радиусов определяются выражениями:

$$\varrho_1 = \sqrt{\frac{1}{4}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + n_3^2(\varepsilon_3 - \varepsilon_1)(\varepsilon_3 - \varepsilon_2)},$$

$$\varrho_2 = \sqrt{\frac{1}{4}(\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + n_1^2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(\varepsilon_1 - \varepsilon_3)};$$

- 4) исходные данные для построения диаграммы и результаты, полученные из построения, сведем в таблицу (табл. 1).

Все величины на диаграмме Мора должны быть отложены в принятом масштабе, и указаны обозначения и численные значения этих величин.

**Таблица 1. Построение и обработка диаграммы Мора**

Исходные данные для построения			Результаты		
$\varepsilon_1$		$\gamma_\tau^{12extr}$		Из расчёта	Из построения
$\varepsilon_2$		$\gamma_\tau^{23extr}$			
$\varepsilon_3$		$\gamma_\tau^{31extr}$	$\varrho_1$		
$\varepsilon_v^{12}$		$\alpha_1$	$\varrho_2$		
$\varepsilon_v^{23}$		$\alpha_2$	$\varepsilon_v^r$		
$\varepsilon_v^{31}$		$\alpha_3$	$\gamma_\tau^r$		

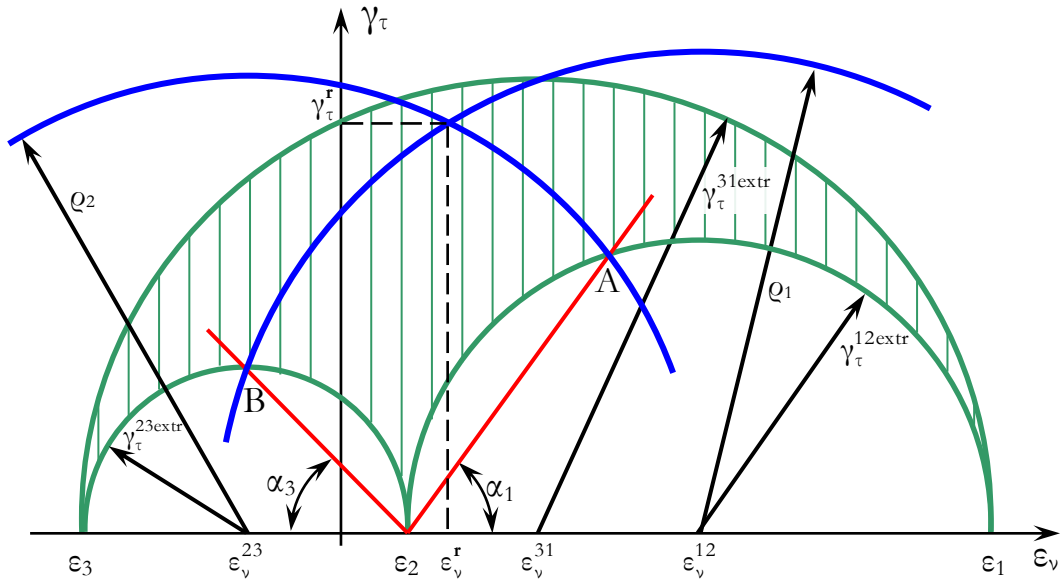


Рис. 3. Диаграмма Мора

## 7. Определение тензора напряжений

Находим девиатор напряжений

$$s_{ij} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{pmatrix},$$

где  $s_{ii} = 2G e_{ii}$ ,  $s_{ij} = G e_{ij}$  ( $i \neq j$ ),  $e_{ii}$ ,  $e_{ij}$  — компоненты девиатора деформации (см. п. 1),  $E$  — модуль упругости 1-го рода (модуль Юнга),  $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$  — модуль упругости 2-го рода (модуль сдвига),  $\nu$  — коэффициент Пуассона.

Тензор напряжений Эйлера  $\sigma_{ij}$  имеет вид

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}, \text{ МПа,}$$

где компоненты вычисляются по следующим формулам:

$$\sigma_{ii} = s_{ii} + \sigma_c; \quad \sigma_{ij} = s_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3, i \neq j),$$

$\sigma_c = 3K \epsilon_c = K \theta$  — среднее напряжение,

$K = \frac{E}{3(1-2\mu)}$  — модуль объемной упругости.

Покажем найденные напряжения на гранях куба, подписав их значения на схеме и направив стрелки в соответствии со знаком (рис. 4).

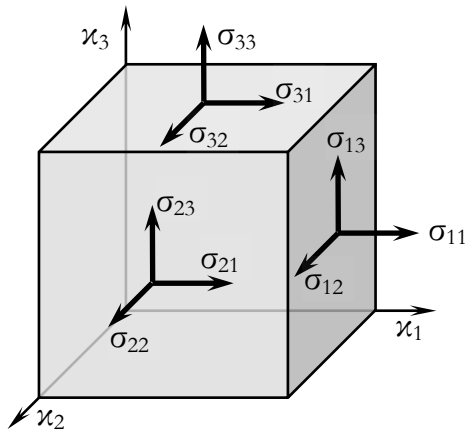


Рис. 4. Тензор напряжений

Найдем главные напряжения:

$$\sigma_i = s_i + \sigma_c = 2Ge_i + 3K\varepsilon_c \quad (i = 1, 2, 3).$$

Тензор напряжений примет вид

$$\sigma_i = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}, \text{ МПа,}$$

Покажем найденные напряжения на гранях главного куба, подписав их значения на схеме и направив стрелки в соответствии со знаком.

## 8. Определение области деформирования

Найдем интенсивность напряжений:

$$\sigma_{\text{н}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}.$$

Сравним результат с пределом текучести заданного материала. Если  $\sigma_{\text{н}} < \sigma_{\text{т}}$ , материал находится в области упругого деформирования. При  $\sigma_{\text{н}} \geq \sigma_{\text{т}}$  материал будет находиться в области упруго-пластического деформирования.

## Список литературы

1. Волков, В. М. Основы механики деформируемого твердого тела: учеб. пособие / В. М. Волков. — НГТУ, Нижний Новгород, 2004, — 110 с.
2. Волков, В. М. Модели сплошных сред и прикладные задачи теории пластичности: учеб. пособие / В. М. Волков. — Горьковский политехнический институт, Горький. 1972. — 125 с.
3. Работнов, Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела. / Ю. Н. Работнов, — М.: Наука, 1988. — 712 с.
4. СК-СТО1-У-37.3-16-11. Общие требования к оформлению пояснительных записок дипломных и курсовых проектов: Стандарт организации. — Нижний Новгород, НГТУ, 2011. — 26 с.