# Устойчивость механических систем (часть 1)

Лекция 2

Классификация задач устойчивости

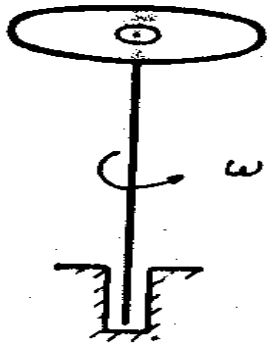
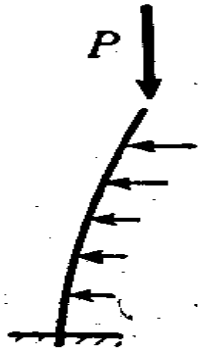
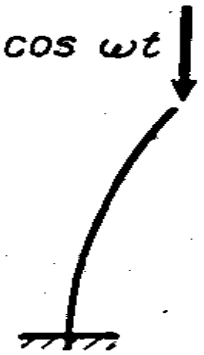
# Классификация связей

- Если связь задаётся равенством, то говорят, что такая связь удерживающая или двусторонняя: $f(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = 0.$
- Если связь задаётся неравенством, то говорят, что такая связь неудерживающая или односторонняя: $f(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \leq 0.$
- Если функция $f(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$ зависит явно от времени, то говорят, что связь нестационарная или реономная. Если эта функция не зависит явно от времени, то говорят что эта связь стационарная или склерономная.
- Если функция не зависит от скоростей, то есть $f = f(t, \mathbf{x}),$ то говорят, что связь геометрическая или голономная. Если не существует замена координат, приводящая функцию $f$ к такому виду, то говорят, что связь кинетическая или неголономная.

## В дальнейшем, если не будет оговорено обратное, ограничимся рассмотрением голономных и склерономных систем

- Голономная система — механическая система, все механические связи которой можно свести к геометрическим (то есть, к голономным). Такие связи сводятся к ограничениям только на положения тел системы.
- Склерономная система – динамическая система с постоянными связями.

# Классификация задач устойчивости систем (Ц)

| Консервативные системы | | Неконсервативные системы | | |
|---|---|---|---|---|
| негироскопические | гироскопические | чисто диссипативные | чисто циркуляционные | чисто нестационарные |
| |   |   | |   |
| Эйлерова задача | Задача о критической скорости | Выпучивание с демпфированием | Выпучивание с касательной силой | Выпучивание при пульсирующей нагрузке |

# Силы и системы

- В дальнейшем станет ясным, что в связи с задачами устойчивости важно знать, является данная сила консервативной или нет.
- Проведем различие между активными силами – нагрузками (могут быть заданы как функции координат, обобщенных скоростей и времени), и реактивными силами – реакциями (они неизвестны и должны быть получены с помощью интегрирования дифференциальных уравнений).

# Реакции могут быть

- Не совершающими работу (например, нормальное давление, статическое сухое трение)
- Диссипативными (диссипация - рассеивание) – совершающими отрицательную работу (например, сухое трение движения)

# Нагрузки бывают

- Нестационарными (явно зависят от времени, например, пульсирующие нагрузки).
- Стационарными (не зависят от времени)
  - Зависящие от скорости
    - Гироскопические (работа в действительном движении = 0: кориолисовы силы, лоренцовы силы, гироскопические моменты)
    - Диссипативные (трение жидкости, сопротивление воздуха)
  - Не зависящие от скорости
    - Нециркуляционные (термин из гидродинамики) – могут быть выведены из однозначного стационарного потенциала (напр., силы тяжести)
    - Циркуляционные

# Система консервативна,

- если все силы (нагрузки и реакции), действующие на неё – консервативны.
- К этим силам относятся реакции, не совершающие работу и нагрузки гироскопического и нециркуляционного типа.
- В задаче Эйлера (будем рассматривать вскорости) все реакции не совершают работы, а внешняя нагрузка, так же как и внутренние усилия, является нециркуляционной.

# Консервативные и неконсервативные системы

- Консервативная система (от лат. conservo — сохраняю) — физическая система, работа неконсервативных сил которой равна нулю и для которой имеет место закон сохранения механической энергии, то есть сумма кинетической энергии и потенциальной энергии системы постоянна.

- Примером консервативной системы служит солнечная система.

- В земных условиях, где неизбежно наличие сил сопротивления (трения, сопротивления среды и др.), вызывающих убывание механической энергии и переход её в другие формы энергии, например в тепло, консервативная система осуществляются лишь грубо приближённо. Например, приближённо можно считать консервативной системой колеблющийся маятник, если пренебречь трением в оси подвеса и сопротивлением воздуха.

# Классические подходы к решению задач устойчивости

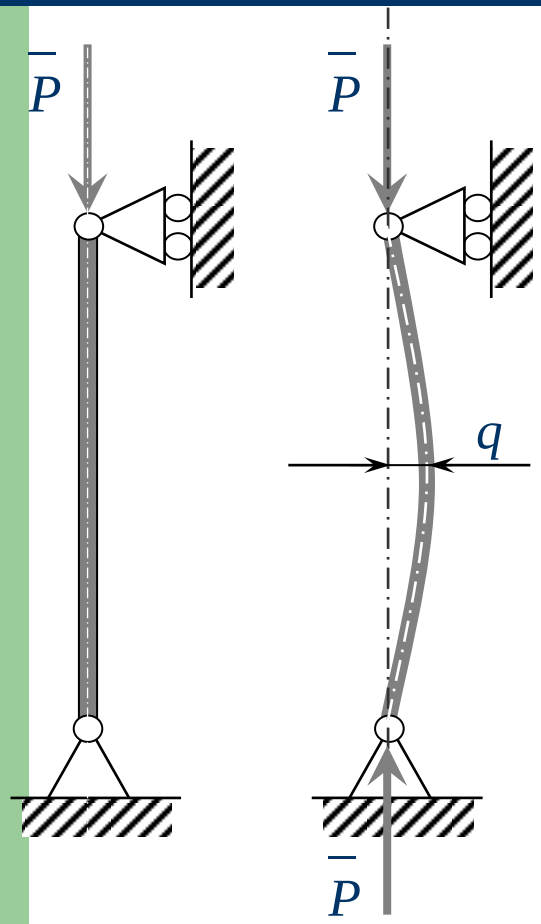
1) Метод несовершенств: при некотором значении нагрузки равновесная форма столь сильно отклонена от ненагруженной формы системы, что конструкция подвергается опасности. Каково значение нагрузки, при котором статические смещения несовершенной системы становятся чрезмерными и даже неограниченными?
2) Метод интегрирования диф. ур-й нейтрального равновесия (метод Эйлера): переход от устойчивой формы равновесия к неустойчивой (тривиальной) характеризуется появлением вблизи тривиальной формы равновесия добавочной (нетривиальной) формы. Каковы значения нагрузки, при которых идеальная система допускает нетривиальные формы равновесия?

3) Энергетический метод: переход от устойчивости к неустойчивости определяется тем фактом, что потенциальная энергия системы перестаёт быть положительно определенной функцией. Каково значение нагрузки, приводящей к такому явлению?

4) Динамический подход (метод малых колебаний). Связан с изучением движения системы вблизи равновесной формы. Малые возмущения форм равновесия приводят к движениям, которые могут стать опасными. Каково значение нагрузки, при которой наиболее общее свободное движение идеальной системы перестаёт быть ограниченным в окрестности положения равновесия?

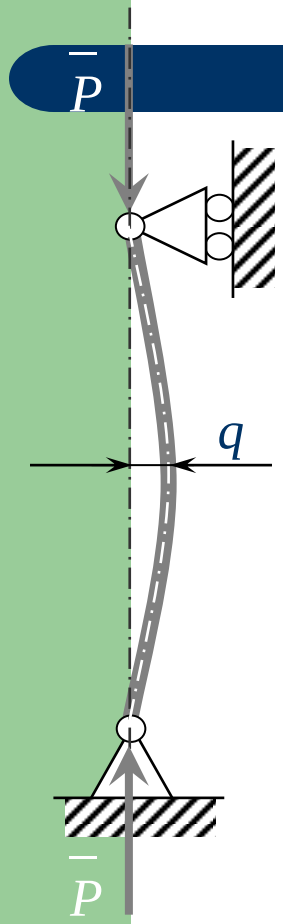
- Наиболее употребимыми из перечисленных методов являются последние три.  Часто эти методы называют просто:
  - Статический (метод Эйлера)
  - Энергетический.
  - Динамический

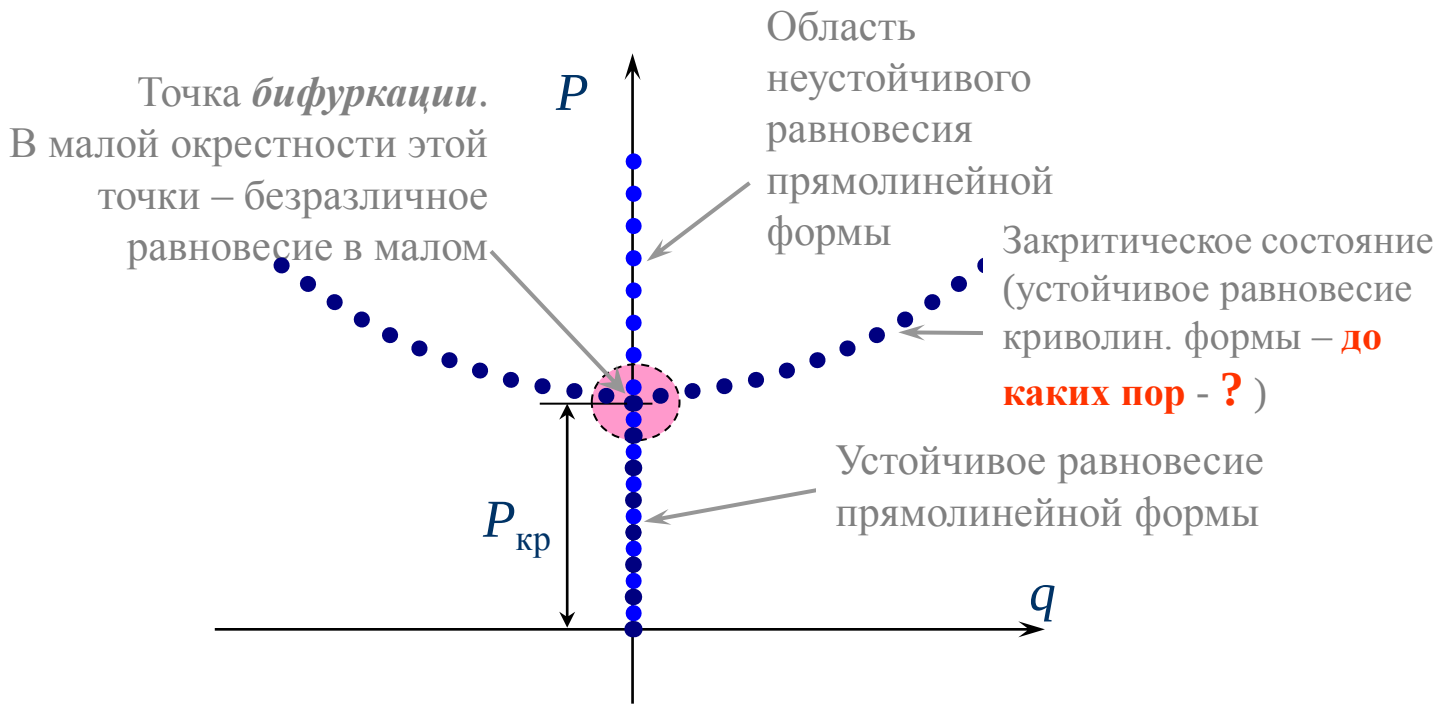
# Устойчивость 1 и 2 рода. Диаграмма равновесных состояний. Точка бифуркации




- Рассмотрим задачу потери устойчивости сжатого стрежня
- Схема идеализирована:
  - ось прямая,
  - поперечное сечение постоянно,
  - материал однороден и абсолютно упруг,
  - опоры – идеальные шарниры,
  - нагрузка без эксцентриситета
- Поведение стержня наглядно описывается графически с помощью кривой или диаграммы равновесных состояний. Каждая точка диаграммы соответствует определенной конфигурации системы.

Поведение стержня наглядно описывается графически с помощью кривой «нагрузка-прогиб» или, иначе, *диаграммы равновесных состояний*. Каждая точка диаграммы соответствует определенной конфигурации системы.



- Бифуркация (bis – два, furcus –разделение, лат. ) раздвоение( рус.), дихотомия (греч.) - в данном случае раздвоение равновесных состояний. Термин «бифуркация» имеет место не только в механике
- В точке бифуркации равновероятны как прямолинейная, так и слегка искривленная формы равновесия

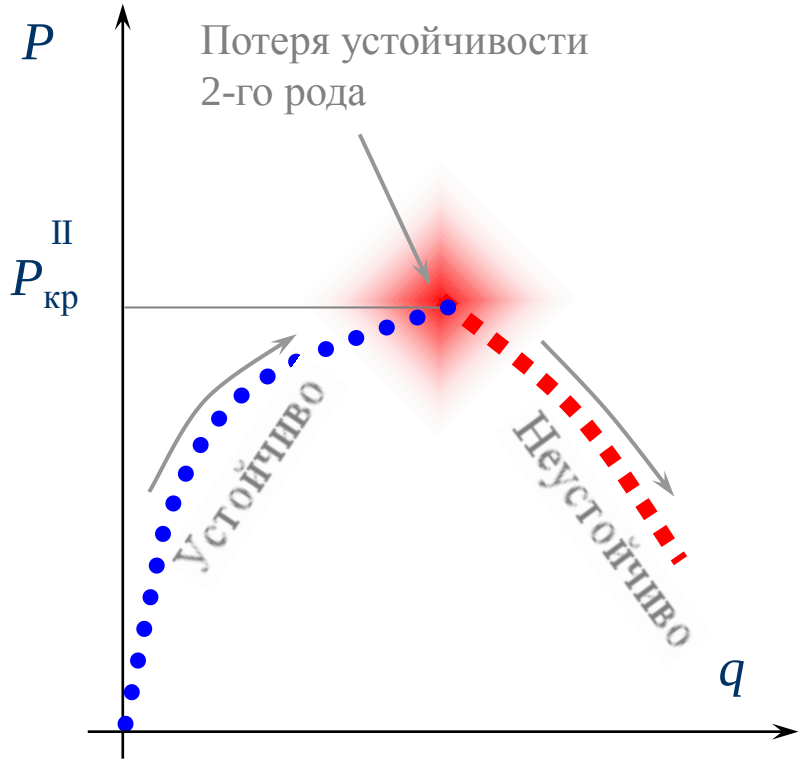
- Рассмотренный случай потери устойчивости в принятой классификации данных явлений именуется классическим. Можно встретить названия:
  - Классический случай
  - Случай Эйлера
  - Потеря устойчивости в эйлеровом смысле
  - Случай появления качественно новых форм равновесия
  - Потеря устойчивости 1-го рода
- Характерным признак – наличие бифуркации равновесных форм

- Аналогичное поведение наблюдается
  - У равномерно сжатого кольца
  - Рамы со сжатыми стержнями, не несущими поперечную нагрузку
  - Сжатые плоские пластины, не несущие поперечной нагрузки
  - Балки, теряющие устойчивость плоской формы изгиба

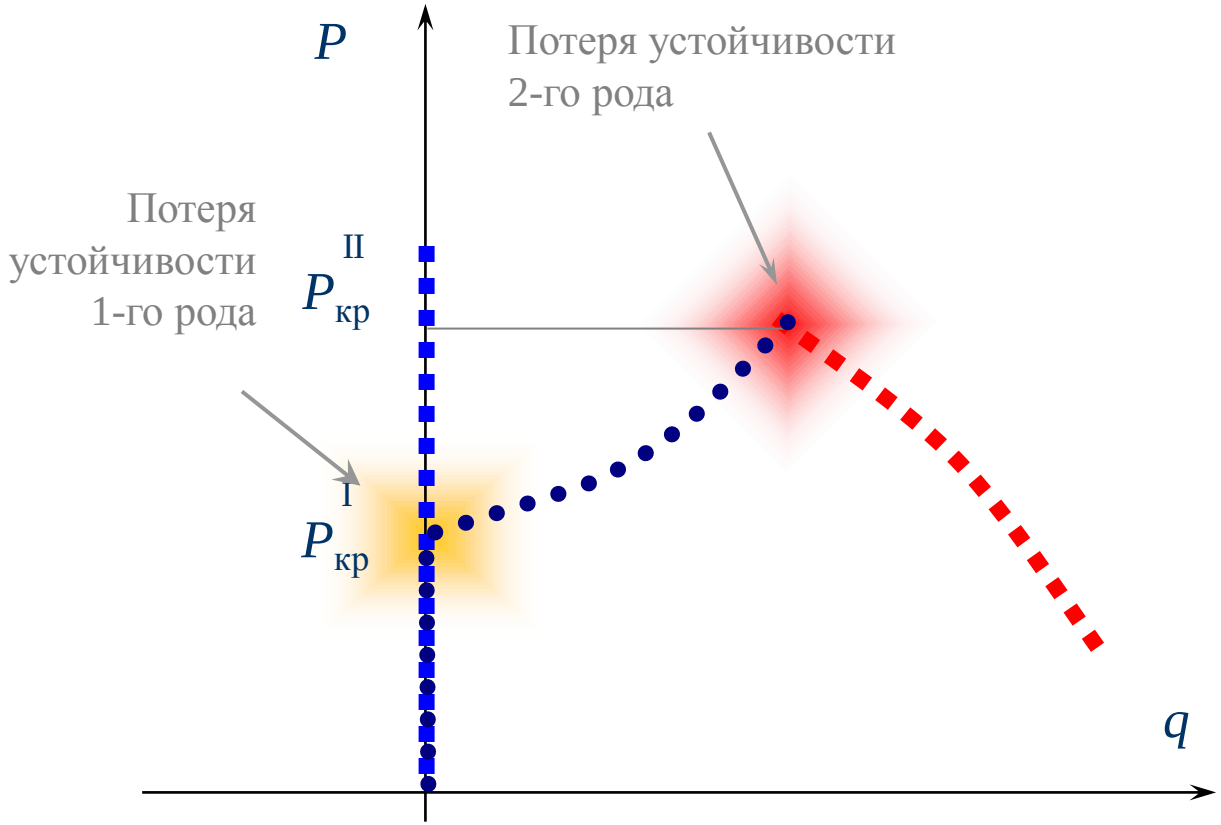
## Другой случай. Полное исчезновение всяких форм равновесия при нарастании нагрузки. Потеря устойчивости 2-го рода

Наблюдается у сжато-изогнутых стержней и пластин

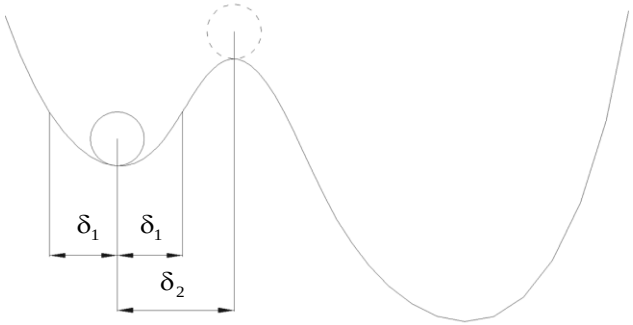
# Диаграмма «нагрузка – прогиб» выглядит следующим образом

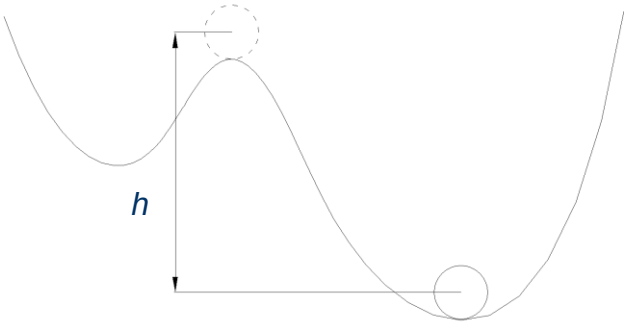


## Применительно к ранее рассмотренному случаю диаграмма будет выглядеть так (ответ на вопрос «до каких пор?»):



# Устойчивость в малом и устойчивость в большом




- Отклонение $\delta_1$ - шарик *устойчив в малом*.
- При отклонении $\delta_2$ - шарик *не устойчив в малом*.
- Если шарик в самом низшем положении, то он *устойчив в большом*.

# Теперь подробнее о методах решения задачи устойчивости

- - статический;
- - динамический;
- - энергетический

# Статический

- Система находится в положении равновесия. Даётся малое отклонение и составляется дифференциальное или алгебраическое уравнение равновесия этого отклонения. Силы инерции не учитывается, считая, что малое отклонение совершается весьма медленно. Если данное уравнение допускает только одно решение, соответствующее исходному положению равновесия, то это положение является устойчивым. Если некоторым значениям соответствует несколько решений, то возможны ещё и отклонённая форма равновесия. Тогда считают, что исходное положение является не устойчивым.
- Как правило, уравнение равновесия при малых отклонениях составляют относительно этих отклонений относительно положения равновесия. Тогда исходному положению будет соответствовать нулевое решение уравнения равновесия. А не нулевые решения будут соответствовать потере устойчивости системы.
- Равновесное положение системы  в статическом методе можно определить не только решением дифференциального уравнения, но и с помощью энергетических теорем, что не приводит к принципиальным изменениям самого метода, но тем не менее метод в таком виде стал носить название энергетического.

# Энергетический

- Впервые был использован Браеном и получил широкое распространение после работ Ритца и Тимошенко.
- Метод основывается на рассмотрении функции всех сил, действующих в системе, и известен в нескольких разновидностях, различающихся системой уравнений, а ещё в большей степени различающихся обоснованием вывода этих уравнений.

# Динамический метод

- Он основан на решении уравнения равновесия в отклонённом положении, которое составляется с учётом си инерции и выступает уже как уравнение движения системы. По свойствам возмущённого движения можно судить об устойчивости системы. Если колебание затухающее или незатухающее малое, то положение системы устойчивое. Если колебательное движение с большой амплитудой или апериодичное с амплитудой увеличивающейся во времени, или с увеличивающимся отклонением от исходного положения, то положение системы будет не устойчивым. Метод является более общим и мощным по сравнению со статическим. Область его применения практически не ограничена и охватывает вопросы не только статической, но и динамической устойчивости. В данном методе можно использовать энергетические теоремы.

$Q_j = 0$

# ТЕОРЕМА ЛАГРАНЖА ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РАВНОВЕСИЯ КОНСЕРВАТИВНОЙ СИСТЕМЫ.

**Дано**

Механическая система с голономными (геометрически не зависимыми от времени) стационарными связями. Система имеет *s* степеней свободы. Система находится под действием сил, имеющих потенциал.

Уравнение равновесия в обобщённых координатах:

$$Q_j = 0 \quad , \quad j = 1,2,\ldots,s \quad .$$

В случае консервативных сил:

$$Q_j = \frac{\partial \Pi}{\partial q_j}$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} = 0$$ – условие экстремума.

То есть положениями равновесия для данной консервативной системы являются положения, при которых потенциальная энергия системы принимает экстремальное значение. Из этих уравнений не понятно, какое положение равновесное.

Условие устойчивости равновесной системы с конечным числом степеней свободы устанавливает теорема Лагранжа (Дирихле).

*Положение равновесия консервативной системы является устойчивым, если потенциальная фнергия системы в них достигает минимума*.

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} = 0$$ – условие минимума.