

## § 21. Потеря устойчивости при ползучести материала

Начиная с 1946 г. в научно-технической литературе оживленно обсуждается проблема устойчивости конструкций при ползучести материала. Влияние ползучести выражается в настолько своеобразных эффектах, что понятие «потеря устойчивости» приобретает новое содержание, не совпадающее ни с одним из вариантов, рассмотренных в предыдущих параграфах.

Ползучестью материалов называют явление роста деформаций во времени, происходящее даже при неизменных нагрузках\*). Для стали это явление существенно лишь при достаточно высоких температурах; однако во многих цветных металлах, легких сплавах и высокополимерных материалах оно обнаруживается и при комнатных температурах.

Установлено, что ползучесть полимерных материалов становится значительно более интенсивной, если кроме основной статической нагрузки материал подвергается действию дополнительной вибрационной нагрузки (даже если последняя невелика). По-видимому, это явление *виброползучести* связано с уменьшением модуля упругости материала вследствие разогрева при вибрациях; из-за уменьшения модуля упругости увеличиваются амплитуды колебаний, а следовательно, происходит еще больший разогрев материала, дальнейшее уменьшение модуля упругости и т. д. Таким образом, сопровождающая вибрация приводит к непрерывному уменьшению модуля упругости материала, что и проявляется в убыстрении роста деформаций, вызываемых основной статической нагрузкой.

Способность материалов к ползучести может оказывать заметное влияние на состояние конструкции в процессе ее эксплуатации. В последнее время в связи с развитием турбостроения особое значение приобрели проблемы ползучести турбинных дисков и лопаток, работающих в условиях высоких температур. Известен ряд случаев, когда в результате ползучести перекрывались зазоры между концами лопаток и корпусом турбомашины и происходила поломка.

Кроме того, ползучесть приводит к постепенному перераспределению напряжений в статически неопределенных си-

---

\*) Иногда этот процесс называют последействием, а термину «ползучесть» приписывают более широкий смысл, понимая под ползучестью и последействие, и релаксацию.

стемах; с этим приходится считаться уже в процессе проектирования, имея в виду, что эксплуатация подобных конструкций (например, железобетонных мостов) может длиться десятки и даже сотни лет.

Для теоретического решения всякой задачи о нагружении конструкции с учетом ползучести необходимо знать **закон ползучести** — связь между действующим напряжением  $\sigma$  и скоростью ползучести  $\dot{\epsilon}_c$ ; экспериментальные данные позволяют принять этот закон в виде степенной зависимости:

$$\dot{\epsilon}_c = \left(\frac{\sigma}{\lambda}\right)^m. \quad (21.1)$$

Кроме того, в случаях, когда сами напряжения меняются во времени, необходимо учесть также скорость упругой деформации, определяемую из закона Гука:

$$\dot{\epsilon}_e = \frac{\dot{\sigma}}{E}. \quad (21.2)$$

Таким образом, суммарная скорость деформации зависит как от напряжения, так и от скорости его изменения:

$$\dot{\epsilon} = \left(\frac{\sigma}{\lambda}\right)^m + \frac{\dot{\sigma}}{E}, \quad (21.3)$$

где  $\lambda$  и  $m$  — постоянные материала (при фиксированной температуре). Такие упрощенные представления достаточны для выяснения всех особенностей потери устойчивости при ползучести; мы будем придерживаться этих представлений, хотя опытные данные допускают также другие варианты описания процесса ползучести.

Существуют два подхода к анализу потери устойчивости при ползучести. *Первый* из них предполагает идеальные условия (отсутствие начальной погиби и эксцентрикитета сжимающей силы); при этом выпучивание происходит после некоторых начальных возмущений (удара или начального смещения). *Второй* подход основан на учете тех или иных заданных нарушений идеальных условий (например, начальной погиби); именно таким образом мы и будем рассматривать задачу.

Как и в предыдущих параграфах этой главы, воспользуемся моделью стойки, изображенной на рис. 21.1, считая, что ползучесть материала опорных стержней описывается

уравнением (21.3). Представим себе, что стойка нагружена сжимающей силой  $P$  меньшей, чем эйлерова сила:

$$P < P_e = \frac{EFb^2}{2al}, \quad (21.4)$$

причем напряжения в опорных стержнях не превосходят предела пропорциональности.

Допустим, что до нагружения ось стойки имела начальное малое отклонение от вертикали на угол  $\varphi_0$ . Тогда непосредственно после приложения нагрузки  $P$  угол отклонения будет равен

$$\varphi_0 = \frac{\varphi_0}{1 - \frac{P}{P_e}}. \quad (21.5)$$

Для течения дальнейшего процесса ползучести существенно, что вследствие асимметрии системы напряжение в правом стержне с самого начала несколько больше напряжения, развивающегося в левом стержне. Из-за разного уровня напряжений ползучесть обоих стержней будет протекать по-разному. Согласно соотношению (21.3) деформации правого стержня будут расти быстрее, чем деформации левого стержня. Важно заметить, что вследствие этого асимметрия системы будет *усугубляться*; следовательно, разница в скоростях деформации обоих стержней будет увеличиваться. Все это означает, что отклонение оси стойки от вертикали будет происходить со все более возрастающей скоростью.

Строго говоря, исследуемые здесь процессы являются динамическими. Но, так как они являются сравнительно медленными, то инерционные эффекты можно приближенно считать отсутствующими и вместо дифференциальных уравнений движения записывать и исследовать уравнения равновесия.

Любопытная особенность рассматриваемого явления состоит в том, что постоянной нагрузке соответствуют изменяющиеся напряжения в стержнях и именно благодаря этому скорость отклонения стойки оказывается переменной. Как

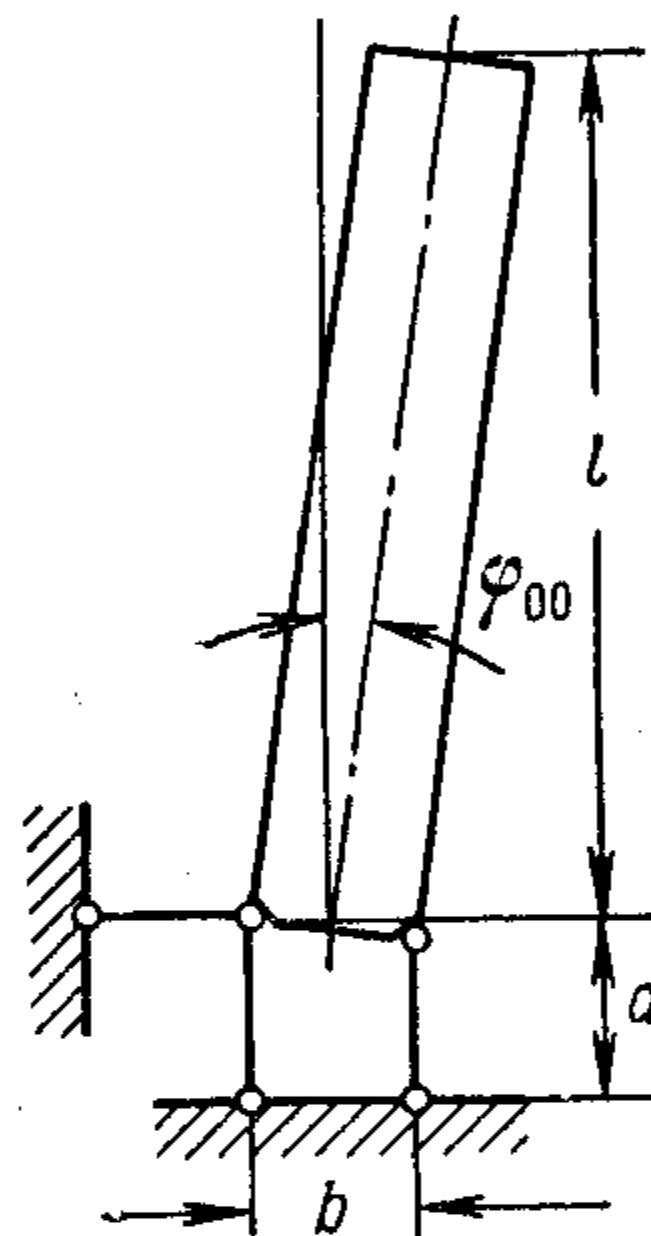


Рис. 21.1. В начальном состоянии ось стойки образует угол  $\varphi_0$  с вертикалью.

покажет количественное исследование, при некоторых условиях скорость деформации может по истечении некоторого времени устремиться к бесконечности. В этом и состоит явление *потери устойчивости* рассматриваемой стойки.

Пусть  $\varphi$  — угол отклонения стойки в текущий момент времени  $t$ ,  $P_1$  и  $P_2$  — сжимающие усилия в левом и правом стержнях. Тогда уравнения равновесия стойки имеют вид (рис. 21.2)

$$\left. \begin{array}{l} P_1 + P_2 = P, \\ -P_1 \frac{b}{2} + P_2 \frac{b}{2} = Pl\varphi. \end{array} \right\} \quad (21.6)$$

Здесь по-прежнему  $b$  — расстояние между опорными стержнями,  $l$  — высота стойки. Из этих уравнений находим сжимающие усилия в обоих стержнях:

$$\left. \begin{array}{l} P_1 = \frac{P}{2} \left( 1 - 2\varphi \frac{l}{b} \right), \\ P_2 = \frac{P}{2} \left( 1 + 2\varphi \frac{l}{b} \right). \end{array} \right\} \quad (21.7)$$

Рис. 21.2.  
Отклоненное  
состояние  
стойки в т-  
екущий м-  
мент време-  
ни.

С другой стороны, эти усилия связаны со скоростями деформации стержней зависимостью (21.3):

$$\frac{d\varepsilon_1}{dt} = \left( \frac{P_1}{\lambda F} \right)^m + \frac{\dot{P}_1}{EF}; \quad \frac{d\varepsilon_2}{dt} = \left( \frac{P_2}{\lambda F} \right)^m + \frac{\dot{P}_2}{EF}. \quad (21.8)$$

(Здесь, как и выше,  $F$  — площадь сечения каждого из стержней.)

Подставим в левые части этих уравнений  $\varepsilon_1 = \frac{\Delta a_1}{a}$  и  $\varepsilon_2 = \frac{\Delta a_2}{a}$  ( $a$  — длина опорных стержней), а в правые части — выражения (21.7); тогда получим

$$\left. \begin{array}{l} \frac{d\Delta a_1}{dt} = a \left[ \frac{P}{2\lambda F} \left( 1 - 2\varphi \frac{l}{b} \right) \right]^m - \frac{P\dot{\varphi}al}{bEF}, \\ \frac{d\Delta a_2}{dt} = a \left[ \frac{P}{2\lambda F} \left( 1 + 2\varphi \frac{l}{b} \right) \right]^m + \frac{P\dot{\varphi}al}{bEF}. \end{array} \right\} \quad (21.9)$$

Этими соотношениями скорости укорочений обоих опорных

стержней связаны с углом отклонения стойки; но между симметричными укорочениями и этим углом существует очевидная кинематическая зависимость

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{\Delta a_2 - \Delta a_1}{b}, \quad (21.10)$$

дифференцируя которую по времени, находим

$$\dot{\varphi} = \frac{1}{b} \left( \frac{d\Delta a_2}{dt} - \frac{d\Delta a_1}{dt} \right). \quad (21.11)$$

При учете выражений (21.9) получим дифференциальное уравнение для угла  $\varphi$  отклонения стойки

$$\dot{\varphi} = \frac{a}{b} \left[ \left( 1 + \frac{2\varphi l}{b} \right)^m - \left( 1 - \frac{2\varphi l}{b} \right)^m \right] \left( \frac{P}{2\lambda F} \right)^m + \frac{2P\dot{\varphi}al}{b^2 EF}; \quad (21.12)$$

оно допускает разделение переменных и, таким образом, приводит к квадратуре. Пусть, например,  $m = 3$  \*), тогда вместо (21.12) получим

$$\dot{\varphi} = \varphi \left[ 1,5 \left( \frac{b}{l} \right)^2 + 2\varphi^2 \right] k, \quad (21.13)$$

где

$$k = \left( \frac{P}{P_0} \right)^3 \left( \frac{E}{2\lambda} \right)^3 \left( \frac{b}{a} \right)^2 : \left( 1 - \frac{P}{P_0} \right). \quad (21.14)$$

Разделяя переменные и интегрируя, найдем

$$t = \frac{1}{k} \int \frac{d\varphi}{\varphi \left[ 2\varphi^2 + 1,5 \left( \frac{b}{l} \right)^2 \right]} + C. \quad (21.15)$$

Отсюда следует

$$t = \frac{l^2}{3kb^2} \ln \frac{\varphi^2}{2\varphi^2 + 1,5 \left( \frac{b}{l} \right)^2} + C. \quad (21.16)$$

Для определения постоянной  $C$  нужно воспользоваться начальным условием

$$\varphi = \varphi_0 \text{ при } t = 0, \quad (21.17)$$

\*) Конечно, для реальных материалов  $m$  может не быть целым числом. Мы принимаем  $m$  целым для упрощения решения; предполагая, что  $m$  — нечетное, мы достигаем единого описания процесса как для сжатия, так и для растяжения.

которое дает

$$C = -\frac{l^2}{3kb^2} \ln \frac{\varphi_0^2}{2\varphi_0^2 + 1,5 \left(\frac{b}{l}\right)^2}. \quad (21.18)$$

Возвращаясь теперь к выражению (21.16), окончательно находим угол  $\varphi$  в функции времени:

$$\varphi = \sqrt{\frac{1,5 \left(\frac{b}{l}\right)^2 \varphi_0^2 e^{3kt} \left(\frac{b}{l}\right)^2}{1,5 \left(\frac{b}{l}\right)^2 + 2\varphi_0^2 \left[1 - e^{3kt} \left(\frac{b}{l}\right)^2\right]}}. \quad (21.19)$$

Заметим, что при некотором значении времени  $t$  знаменатель подкоренного выражения становится равным нулю, т. е. угол отклонения стойки  $\varphi$  устремляется в бесконечность. Такое время  $t$ , по истечении которого происходит неограниченный рост отклонений, представляет собой, можно сказать, срок жизни стойки; это время называют *критическим временем*. Из выражения (21.19) можно найти, что критическое время равно

$$t_{kp} = \frac{1}{3} \left(\frac{P_s}{P}\right)^3 \left(\frac{2\lambda}{E}\right)^3 \left(\frac{al}{b^2}\right)^2 \ln \left[1 + \frac{3}{4} \left(\frac{b}{\varphi_0 l}\right)^2\right] \left(1 - \frac{P}{P_s}\right). \quad (21.20)$$

Для иллюстрации примем следующие значения постоянных:

$$E = 5 \cdot 10^5 \text{ кг}/\text{см}^2, \lambda = 17100 \text{ кг} \cdot \text{см}^{-2} \cdot \text{сек}^{1/3}, \frac{l}{b} = 100,$$

$$\frac{a}{b} = 4, \varphi_0 = 2 \cdot 10^{-4}, F = 1 \text{ см}^2, P = 500 \text{ кг}.$$

При этих значениях находим по формуле (16.3):

$$P_s = 625 \text{ кг},$$

т. е. условие  $P < P_s$  выполнено.

Теперь по формуле (21.5) вычисляем  $\varphi_0 = 10^{-3}$ . На рис. 21.3 представлена зависимость  $\varphi = \varphi(t)$ , вычисленная с помощью выражения (21.19). Критическое время по формуле (21.20) равно  $t_{kp} = 28$  сек.

Как видно из формулы (21.20), критическое время зависит не только от параметров самой стойки, но и от значения сжимающей силы  $P$  (точнее — от отношения  $\frac{P}{P_s}$ ). При  $P = P_s$  стойка сразу теряет устойчивость, так как согласно

выражению (21.20) критическое время равно нулю независимо от свойства ползучести. При  $P < P_s$  критическое время тем больше, чем меньше отношение  $\frac{P}{P_s}$ . На рис. 21.4 изображена зависимость критического времени от величины силы  $P$  для условий решенного выше примера. Очевидно, при любой

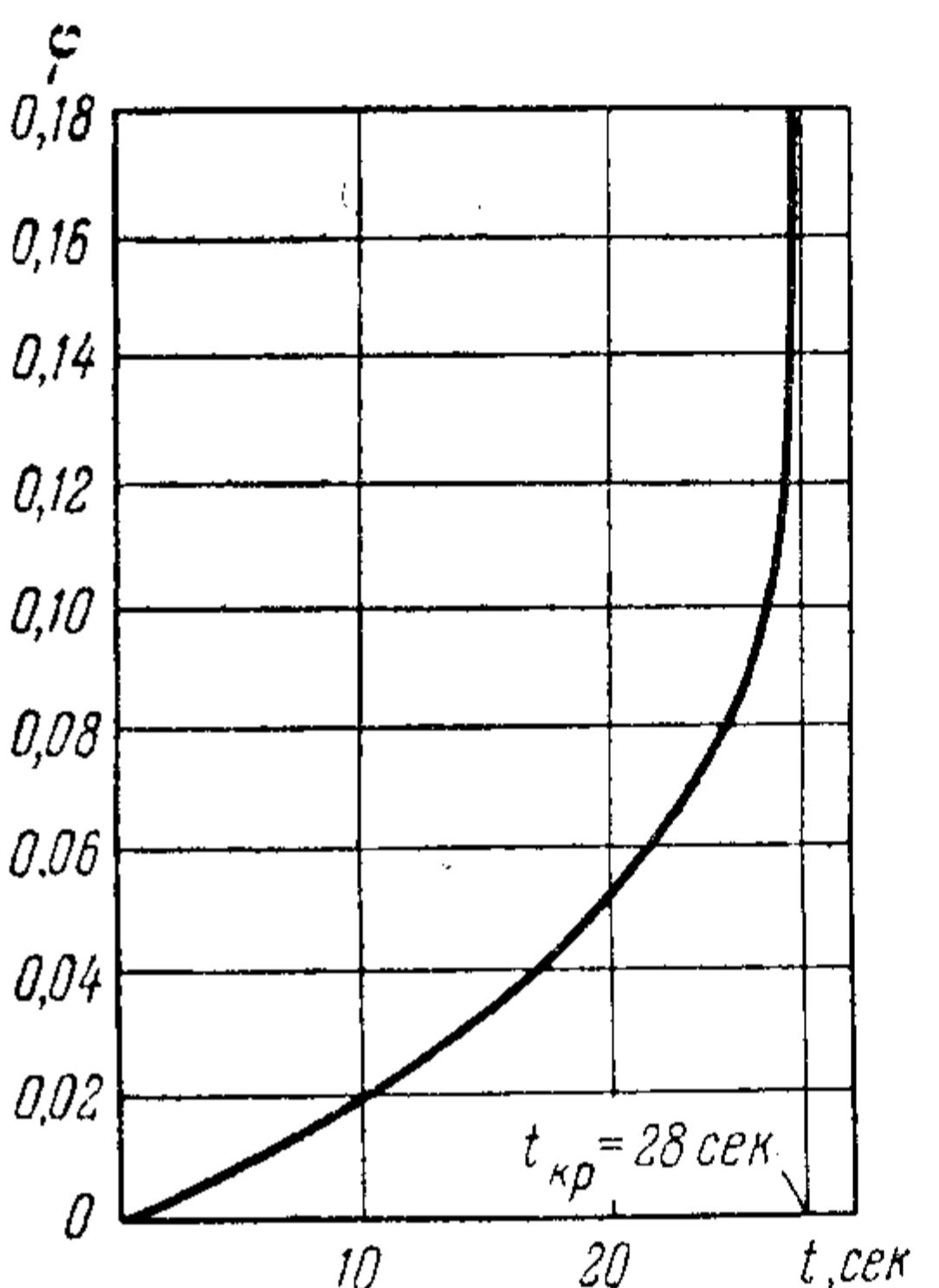


Рис. 21.3. Зависимость угла  $\varphi$  от времени  $t$ . При  $t = t_{kp}$  угол  $\varphi$  неограниченно увеличивается.

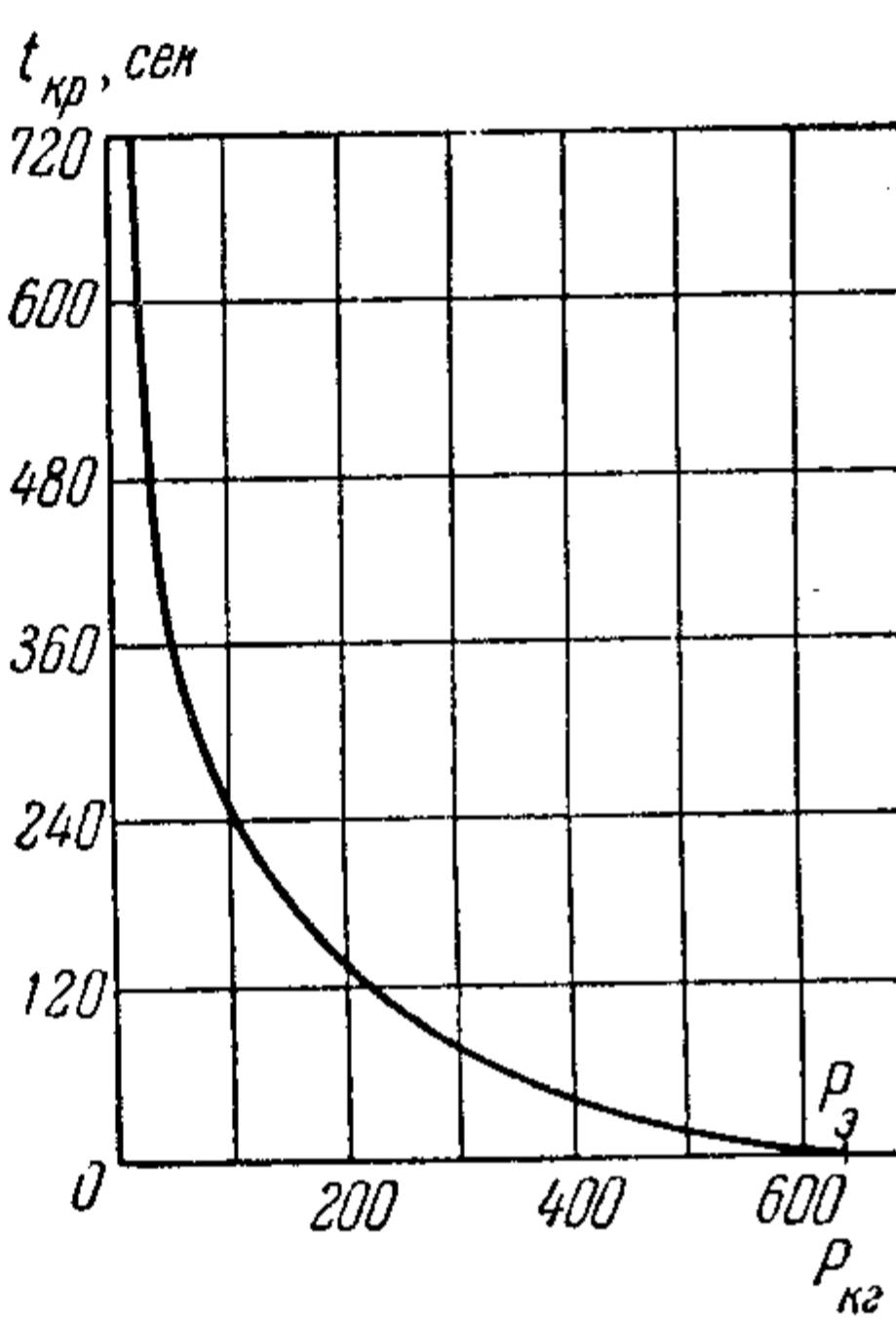


Рис. 21.4. Критическое время убывает с ростом сжимающей силы  $P$ . При  $P = P_{kp}$  критическое время равно нулю.

силе  $P > 0$  в конце концов происходит потеря устойчивости и поэтому о критической силе здесь говорить трудно; гораздо большей определенностью обладает понятие критического времени.

Любопытно отметить, что при *линейной* связи скорости установившейся ползучести с действующим напряжением (т. е. когда в выражении (21.3)  $m = 1$ ) потеря устойчивости в изложенном выше смысле невозможна. В самом деле, полагая в дифференциальном уравнении (21.12)  $m = 1$ , получаем

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{EP}{\lambda(P_s - P)} \varphi. \quad (21.21)$$

Интегрируя при прежнем начальном условии (21.17), находим

$$\varphi = \varphi_0 e^{\frac{EP}{\lambda(P_0 - P)} t}. \quad (21.22)$$

Эта зависимость гораздо «спокойнее» зависимости (21.19), так как хотя угол  $\varphi$  увеличивается с возрастающей скоростью, но остается ограниченным при любом конечном  $t$ . В этом случае можно условно считать, что потеря устойчивости соответствует моменту, когда скорость возрастания угла  $\varphi$  достигает некоторого заданного значения.

Первые исследования в этой области принадлежат А. Р. Ржаницыну (см. его статью «Процессы деформирования конструкций из упруго-вязких элементов», Доклады АН СССР, т. 52, № 1, 1946), А. Д. Россу (см. журнал «The Struct. Eng.» № 8 за 1946 г. и № 5 за 1947 г.), А. М. Фрейденталю (доклад на VI Международном съезде по прикладной механике, Париж, 1946) и Дж. Марину (см. журнал «J. Appl. Phys.» № 1 за 1947 г.). С тех пор проведен обширный цикл теоретических и экспериментальных исследований. Их обзор, доведенный до 1958 г., был сделан Н. Хоффом (см. периодический сборник переводов иностранных статей «Механика», № 1 (59) за 1960 г.); здесь, в частности, обсуждается любопытный парадокс, обнаруженный Ю. Н. Работновым и С. А. Шестериковым (см. их статью «Устойчивость стержня в условиях ползучести», Прикл. матем. и мех., № 6, 1956).

Некоторые из вопросов потери устойчивости при ползучести рассмотрены в книге Н. Хоффа «Продольный изгиб и устойчивость» (ИЛ, Москва, 1955). См. также статью В. И. Розенблюма «Устойчивость сжатого стержня в условиях ползучести» (Инж. сб. Изд. АН СССР, т. 18, 1954) и работу А. Р. Ржаницына «Устойчивость при ползучести» (сб. «Проблемы устойчивости в строительной механике», Стройиздат, Москва, 1965, стр. 104—118).

Общим проблемам ползучести посвящены книги Н. Н. Малинина («Основы расчетов на ползучесть», Машгиз, 1948), Н. Х. Арутюяна («Некоторые вопросы теории ползучести», Гостехиздат, 1952) и Л. М. Качанова («Теория ползучести», Физматгиз, 1960).

О явлении виброползучести см. статью Г. И. Баренблатта в журнале «Прикладная математика и механика», т. 30, № 1, 1966.