ОБОЗНАЧЕНИЯ ЧАСТО ВСТРЕЧАЮЩИХСЯ ВЕЛИЧИН

Обозначение	Наименование	Размерность
$P_{кр}$	Критическая сила	*кГ*
β	Критический параметр	—
y	Прогиб	*см*
y', φ	Угол поворота	*рад*
n	Число степеней свободы	—
U	Потенциальная энергия системы	*кГм*
E	Модуль упругости	*кг/см²*
E'	Касательный модуль	»
$E_{пр}$	Приведенный »	»
J	Момент инерции осевой	*см⁴*
$\mathbf{k}$	Жесткость связи при линейном смещении	*кГ/см*
k	Жесткость связи при повороте	*кГ·см/рад*
l	Пролет стержня	*м*
δ, Δ	Перемещение точки приложения силы	*см*
M	Изгибающий момент	*кГ·см*
Q	Поперечная сила	*кг*
$n=\sqrt{\frac{P}{EJ}}$	Параметр устойчивости	$см^{-1}$
D	Определитель устойчивости	—
i	Погонная жесткость	*кГ·см*
λ	Характеристическое число	—
ε	Матрица возмущений	—
$\mathbf{A}$	Грузовая матрица	—
Π	Матрица влияния реакций	—
$\mathbf{L}$	То же, моментов	—
$\mathbf{W}$	Матрица упругих грузов	—
$\mathbf{G}$	» моментов инерции	—
T	Работа внешних сил	*кГ·см*
W	» внутренних сил	»

№ 1. Абсолютно жесткий невесомый консольный стержень ($EJ = \infty$) длиной l закреплен в основании упруго-податливо относительно поворота (фиг. 3, *а*). Жесткость связи — величина момента, возникающего в основании при повороте опорного сечения на единицу, — равна k. Необходимо найти статическим и энергетическим методами величину критической силы. Сопоставьте абсолютно жесткий стержень с упругим стержнем (фиг. 3, *б*), для которого величина критической нагрузки равна $P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{4l^2}$, и найдите то значение k, при котором критическая сила в абсолютно жестком стержне равнялась бы критической силе в упругом стержне с известной жесткостью стержня EJ и той же длиной l, что и у абсолютно жесткого стержня.

Решение:

1. Решим поставленную задачу статическим методом. Для этого рассмотрим абсолютно жесткий стержень в отклоненном состоянии (фиг. 3, *в*), близком к исходному. Составим условие равновесия моментов относительно

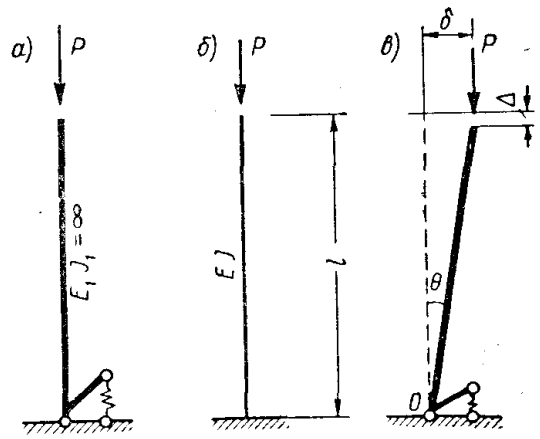
точки O. При отклонении стержня на угол θ в основании возникает момент θk, момент от внешней нагрузки относительно точки O равен $P\delta$, при учете малости угла θ можно принять, что $\delta = l \sin\theta \approx l\theta$. Условие равновесия теперь запишется так:

$$\sum M_0 = P\delta - \theta k = Pl\theta - \theta k = 0,$$

откуда

$$P_{кр} = \frac{k}{l}.$$

2. Рассмотрим решение той же задачи энергетическим методом. Изменение упругой энергии рассматриваемой системы определяется работой, проделанной силами при переходе системы из первоначального в отклоненное положение. Работа силы P при этом определится выражением $P\Delta$, причем с учетом малости перемещений Δ определяется как



Фиг. 3

$$\Delta = l(1 - \cos\theta) = 2l \sin^2 \frac{\theta}{2} \approx \frac{l\theta^2}{2}.$$

Работа, совершенная моментом $k\theta$, возникающим в упругой связи, определяется выражением $\frac{1}{2}k\theta^2$.

Величина изменения полной упругой энергии U определится как

$$U = -P\frac{l\theta^2}{2} + \frac{k\theta^2}{2}.$$

Критическое состояние будет тогда, когда

$$\frac{dU}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\left(-P\frac{l\theta^2}{2} + \frac{k\theta^2}{2}\right) = \frac{-Pl + k}{2} \cdot \frac{d\theta^2}{d\theta} = \frac{-Pl + k}{2} 2\theta = 0.$$

Так как θ отлично от нуля (мы сами мысленно придали системе отклонение), то условие для определения критической силы запишется:

$$-Pl + k = 0,$$

откуда $P_{кр} = \frac{k}{l}$.

3. Решим поставленную задачу динамическим методом. Возможное движение системы характеризуется поворотом стержня относительно точки 0. Уравнение движения при этом запишется

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = Pl\theta - k\theta,$$

где I — момент инерции массы рассматриваемого стержня относительно точки 0. Последнее уравнение может быть приведено к виду

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0, \qquad (a)$$

где

$$\omega^2 = k - Pl.$$

Критическому состоянию будет соответствовать такое положение, при котором стержень, выведенный из первоначального равновесного состояния, получает конечные или бесконечные отклонения, не возвращаясь в

исходное состояние. В соответствии с материалом, изложенным во второй части книги (стр. 147), решение уравнения (а) может быть записано в виде

$$\theta = \theta_0 \cos \omega t,$$

где θ_0 — угол, определяющий начальное отклонение стержня.

В соответствии с последним уравнением стержень при любом конечном значении ω спустя некоторый конечный интервал времени опять вернется в исходное положение и будет совершать незатухающие колебания, если не учитывать сил затухания, относительно положения устойчивого равновесия. Период этих колебаний определяется величиной

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

И лишь в случае, когда период колебаний стремится к бесконечности, система, выведенная из состояния равновесия, практически не вернется в первоначальное устойчивое состояние. Но период будет стремиться к бесконечности, когда частота ω стремится к нулю, что дает возможность записать условие

$$\omega^2 = k - Pl = 0,$$

из которого можно найти значение критической силы

$$P_{кр} = \frac{k}{l}.$$

4. Чтобы определить ту жесткость k, при которой $P_{кр}$ в абсолютно жестком стержне равно $P_{кр}$ в упругом стержне, следует приравнять значения критических сил

$$\frac{\pi^2 EJ}{4l^2} = \frac{k}{l},$$

откуда искомая величина жесткости определяется как

$$k = \frac{\pi^2 EJ}{4l}.$$

№ 5. Определить критическую силу для системы с одной степенью свободы, состоящей из абсолютно жестких дисков (фиг. 8, *а*). Значения коэффициентов жесткости относительно взаимного поворота сечений в шарнирах для обоих шарниров разные: k_1 и k_2. Задачу решите статическим и энергетическим методами.

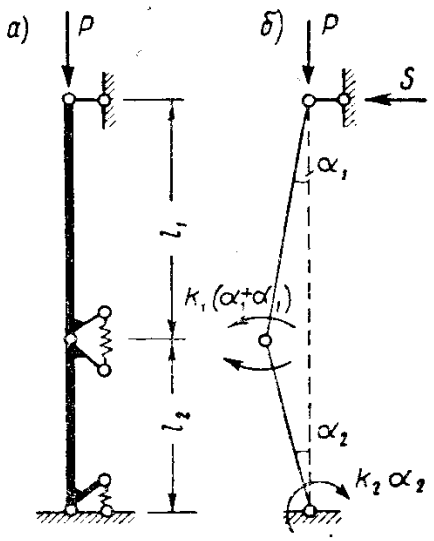
Решение. Возможная форма потери устойчивости системы представлена на фиг. 8, *б*. В горизонтальном опорном стержне на верхнем конце появится опорная реакция S. При решении задачи статическим методом запишем условия равновесия моментов относительно среднего и опорного шарниров:

$$Pl_1 \alpha_1 - Sl_1 - k_1 (\alpha_1 + \alpha_2) = 0;$$
$$-S(l_1 + l_2) + k_2 \alpha_2 = 0.$$

Из геометрических соображений следует, что $l_1 \sin \alpha_1 = l_2 \sin \alpha_2$, но, учитывая малость углов, будем иметь $l_1 \alpha_1 = l_2 \alpha_2$ или $\alpha_2 = \alpha_1 \frac{l_1}{l_2}$. Систему полученных уравнений равновесия теперь представим в виде:

$$\alpha_1\left[Pl_1-k_1\left(1+\frac{l_1}{l_2}\right)\right]-Sl_1=0;$$

$$\alpha_1\frac{l_1}{l_2}k_2-S(l_1+l_2)=0.$$



Фиг. 8

Данная система однородна относительно величин α_1 и S, поэтому ее решение возможно лишь при обращении в нуль определителя, составленного из коэффициентов при α_1 и S, т. е.

$$D=\begin{vmatrix} Pl_1-k_1\left(1+\frac{l_1}{l_2}\right) & -l_1 \\ \frac{l_1}{l_2}k_2 & -l_1\left(1+\frac{l_2}{l_1}\right)\end{vmatrix}=0.$$

Раскрывая определитель, получим

$$P_{\text{кр}}=\frac{k_1\left(1+\frac{l_1}{l_2}\right)\left(1+\frac{l_2}{l_1}\right)+\frac{l_1}{l_2}k_2}{l_1(1+l_2/l_1)}.$$

Решим эту задачу энергетическим методом. Работа внешней силы P равна:

$$-P\,[l_1(1-\cos\alpha_1)+l_2(1-\cos\alpha_2)]\approx-\frac{P}{2}(l_1\alpha_1^2+l_2\alpha_2^2).$$

Учитывая ранее установленную связь между углами α_1 и α_2, работу силы P определим как

$$\frac{P\alpha_1^2 l_1}{2}\left(1+\frac{l_1}{l_2}\right).$$

Работа, совершенная в среднем шарнире, равна:

$$\frac{1}{2}k_1(\alpha_1+\alpha_2)^2=\frac{1}{2}k_1\alpha_1^2\left(1+\frac{l_1}{l_2}\right)^2.$$

Работа, совершенная в нижнем шарнире, определится как

$$\frac{1}{2}k_2\alpha_2^2=\frac{1}{2}\alpha_1^2\frac{l_1^2}{l_2^2}.$$

Работа, совершенная в нижнем шарнире, определится как

$$\frac{1}{2} k_2 \alpha_2^2 = \frac{1}{2} \alpha_1^2 \frac{l_1^2}{l_2^2}.$$

Изменение потенциальной энергии системы равно:

$$U = -\frac{P}{2} \alpha_1^2 l_1 \left(1 + \frac{l_1}{l_2}\right) + \frac{1}{2} k_1 \alpha_1^2 \left(1 + \frac{l_1}{l_2}\right)^2 + \frac{1}{2} k_2 \alpha_1^2 \frac{l_1^2}{l_2^2}.$$

Уравнение для определения критической силы запишется

$$\frac{dU}{d\alpha_1} = -2\alpha_1 \left[\frac{Pl_1}{2}\left(1 + \frac{l_1}{l_2}\right) - \frac{1}{2} k_1 \left(1 + \frac{l_1}{l_2}\right)^2 - k_2 \frac{l_1^2}{l_2^2}\right] = 0,$$

откуда следует, что

$$P_{\text{кр}} = \frac{k_1 \left(1 + \frac{l_1}{l_2}\right)^2 + k_2 \frac{l_1^2}{l_2^2}}{l_1 \left(1 + \frac{l_1}{l_2}\right)}.$$

Нетрудно проверить, что значения, найденные статическим и энергетическим методами, хотя и отличаются по виду, тождественны:

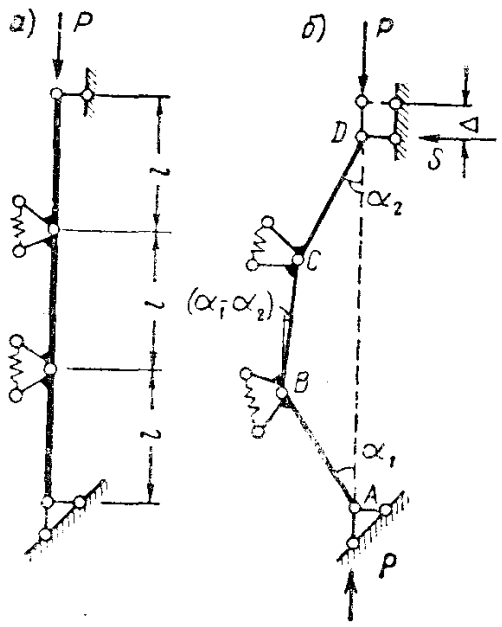
$$\frac{k_1 \left(1 + \frac{l_1}{l_2}\right)\left(1 + \frac{l_2}{l_1}\right) + \frac{l_1}{l_2} k_2}{l_1 \left(1 + \frac{l_2}{l_1}\right)} = \frac{k_1 \left(1 + \frac{l_1}{l_2}\right)^2 + k_2 \frac{l_1^2}{l_2^2}}{l_1 \left(1 + \frac{l_1}{l_2}\right)}.$$

№ 24. Определить значения критических сил в системе, представленной на фиг. 24, *а*. Стержни абсолютно жесткие; жесткость упругих связей k относительно взаимного поворота сечений в шарнирах одинакова. Задачу решите статическим, энергетическим и динамическим методами.

Решение. Рассмотрим определение критических сил статическим методом. В этом случае обратимся к произвольному возмущенному состоянию, в частности представленному на фиг. 24, *б*.

Усилие S в верхнем опорном стержне будет равно нулю, в чем нетрудно убедиться, если взять сумму моментов относительно нижнего шарнира A.

Составляем уравнения равновесия относительно шарниров C и B. Перемещение точки B по горизонтали, учитывая малость угла α_1, представим как $\alpha_1 l$, а перемещение точки C в том же направлении равно $\alpha_2 l$.



Фиг. 24

Взаимный угол поворота сечений в шарнире B равен: $(\alpha_1 - \alpha_2) + \alpha_1 = 2\alpha_1 - \alpha_2$, взаимный угол поворота сечений в шарнире C равен: $\alpha_2 - (\alpha_1 - \alpha_2) = 2\alpha_2 - \alpha_1$.

Уравнения равновесия запишутся:

$$P\alpha_2 l - (2\alpha_2 - \alpha_1) k = 0;$$
$$P\alpha_1 l - (2\alpha_1 - \alpha_2) k = 0.$$

Представим систему уравнений в виде

$$(Pl - 2k)\alpha_2 + k\alpha_1 = 0;$$
$$k\alpha_2 + (Pl - 2k)\alpha_1 = 0.$$

Приравняем определитель данной системы уравнений нулю

$$D = \begin{vmatrix} Pl - 2k & k \\ k & Pl - 2k \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получим следующее уравнение второй степени:

$$l^2P^2 - 4klP + 3k^2 = 0.$$

Решение уравнения получим в виде

$$P = \frac{4kl \pm \sqrt{16k^2 l^2 - 12k^2 l^2}}{2l^2},$$

откуда получим два значения критической силы

$$P_{кр_1} = \frac{4kl - 2kl}{2l^2} = \frac{k}{l};$$
$$P_{кр_2} = \frac{4kl + 2kl}{2l^2} = \frac{3k}{l}.$$

Решение энергетическим методом проводится следующим образом. Определяем величину перемещения осевой силы

$$\Delta = l(1 - \cos\alpha_2) + l(1 - \cos\alpha_1) + l[1 - \cos(\alpha_1 - \alpha_2)] \approx$$
$$\approx \frac{1}{2}\left[\alpha_2^2 + \alpha_1^2 + (\alpha_1 - \alpha_2)^2\right] \approx l(\alpha_1^2 - \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2).$$

Изменение энергии системы, обусловленное перемещением силы P, если принять за начало отсчета устойчивое равновесное состояние, можно представить в виде

$$-P\Delta = -Pl(\alpha_1^2 - \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2).$$

Здесь знак минус показывает, что смещение силы направлено по направлению действия силы, а это приводит к понижению энергии системы.

Потенциальная энергия, накопленная в упругой связи при шарнире C, определится выражением

$$\frac{1}{2} k (2\alpha_2 - \alpha_1)^2,$$

а энергия, накопленная в упругой связи при шарнире B, равна

$$\frac{1}{2} k (2\alpha_1 - \alpha_2)^2.$$

Выражение для изменения полной потенциальной энергии системы теперь запишется:

$$U = -Pl(\alpha_1^2 - \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2^2) + \frac{1}{2} k (2\alpha_2 - \alpha_1)^2 + \frac{1}{2} k (2\alpha_1 - \alpha_2)^2. \qquad \text{(а)}$$

Для получения уравнения устойчивости продифференцируем выражение для полной потенциальной энергии по параметрам α_1 и α_2, что дает

$$\frac{\partial U}{\partial \alpha_1} = -Pl(2\alpha_1 - \alpha_2) - k(2\alpha_2 - \alpha_1) + 2k(2\alpha_1 - \alpha_2) = 0;$$

$$\frac{\partial U}{\partial \alpha_2} = -Pl(-\alpha_1 + 2\alpha_2) + 2k(2\alpha_2 - \alpha_1) - k(2\alpha_1 - \alpha_2) = 0.$$

Перепишем полученную систему уравнений в виде

$$-(2Pl - 5k)\alpha_1 + (Pl - 4k)\alpha_2 = 0;$$

$$(Pl - 4k)\alpha_1 - (2Pl - 4k)\alpha_2 = 0.$$

Определитель системы уравнений приравняем нулю

$$\begin{vmatrix} -2Pl + 5k & Pl - 4k \\ Pl - 4k & -2Pl + 5k \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель и производя элементарные преобразования, получим следующее квадратное уравнение:

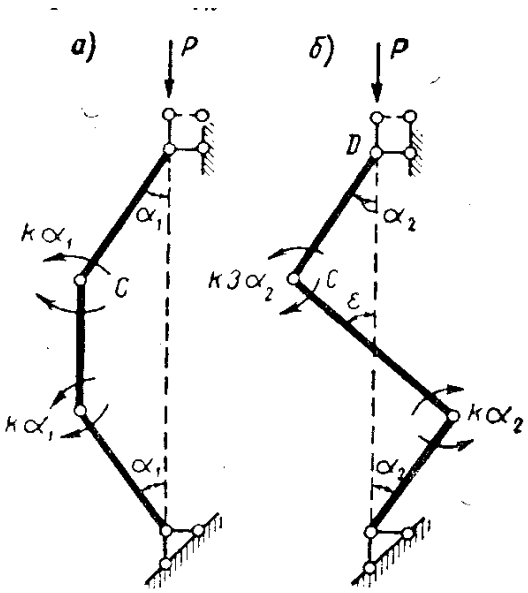
$$l^2 P^2 - 4lkP + 3k^2 = 0,$$

которое полностью совпадает с квадратным уравнением, полученным статическим методом.

Воспользуемся теперь динамическим методом. Составим уравнения, описывающие движение системы, представленной на фиг. 24, *а*. Уравнения движения в рассматриваемом случае лучше всего получить, используя уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial K}{\partial q_k} = -\frac{\partial U}{\partial q_k} \quad (k = 1, 2, \ldots),$$

в которых K — кинетическая энергия системы; U — ее потенциальная энергия; q_k — обобщенные координаты; t — время. Точкой обозначены



Фиг. 25

производные обобщенных координат по времени.

Кинетическая энергия системы равна:

$$K = \frac{I_1 \dot{\alpha}_1^2}{2} + \frac{I_2 (\dot{\alpha}_1 - \dot{\alpha}_2)^2}{2} + \frac{I_3 \dot{\alpha}_2^2}{2}.$$

Потенциальная энергия системы была определена выше (а). Независимыми координатами являются углы α_1 и α_2. Так как система имеет две степени свободы, то дважды используем уравнение Лагранжа, полагая $q_1 = \alpha_1$ и $q_2 = \alpha_2$. В результате приходим к следующей системе двух уравнений:

$$I_1 \ddot{\alpha}_1 + I_2 (\ddot{\alpha}_1 - \ddot{\alpha}_2) = -2k(2\alpha_1 - \alpha_2) + k(2\alpha_2 - \alpha_1) + Pl(2\alpha_1 - \alpha_2);$$

$$-I_2 (\ddot{\alpha}_1 - \ddot{\alpha}_2) + I_3 \ddot{\alpha}_2 = k(2\alpha_1 - \alpha_2) - 2k(2\alpha_2 - \alpha_1) + Pl(-\alpha_1 + 2\alpha_2).$$

После элементарных преобразований последние можно представить в виде

$$I_1 \ddot{\alpha}_1 + I_2 (\ddot{\alpha}_1 - \ddot{\alpha}_2) = (-5k + 2Pl)\alpha_1 - (-4k + Pl)\alpha_2;$$

$$-I_2 (\ddot{\alpha}_1 - \ddot{\alpha}_2) + I_3 \ddot{\alpha}_2 = -(-4k + Pl)\alpha_1 + (-5k + 2Pl)\alpha_2.$$

Уравнение частот при этом может быть представлено как

$$\begin{vmatrix} -5k + 2Pl + I_1 \omega^2 + I_2 \omega^2 & 4k + Pl - I_2 \omega^2 \\ 4k - Pl - I_2 \omega^2 & -5k + 2Pl + I_2 \omega^2 + I_3 \omega^2 \end{vmatrix} = 0,$$

где ω — частота собственных колебаний. При действии на систему критической нагрузки частота должна обратиться в нуль (см. задачу 1 главы I), тогда из уравнения частот получаем определитель устойчивости:

$$\begin{vmatrix} -5k + 2Pl & 4k + Pl \\ 4k - Pl & -5k + 2Pl \end{vmatrix} = 0,$$

из которого следует уравнение для определения критического значения нагрузки, полностью совпадающее с тем, которое было получено при решении задачи статическим и энергетическим методами.

№ 24. Решить ту же задачу, что и в предыдущем примере, только с учетом условий симметрии системы.

Указание. Предположите, что в рассматриваемой системе с двумя степенями свободы возможны две формы потери устойчивости (фиг. 25, *а* и *б*), одна из которых является симметричной относительно середины пролета, а другая — обратно симметричной.

Решение. Рассмотрим симметричную форму потери устойчивости (фиг. 25, *а*). Прибегая к помощи статического метода расчета, получим следующее уравнение равновесия моментов относительно шарнира C:

$$\sum M_C = Pl\alpha_1 - k\alpha_1 = 0,$$

откуда

$$P_{кр} = \frac{k}{l},$$

что совпадает с первой критической силой, полученной в предыдущей задаче.

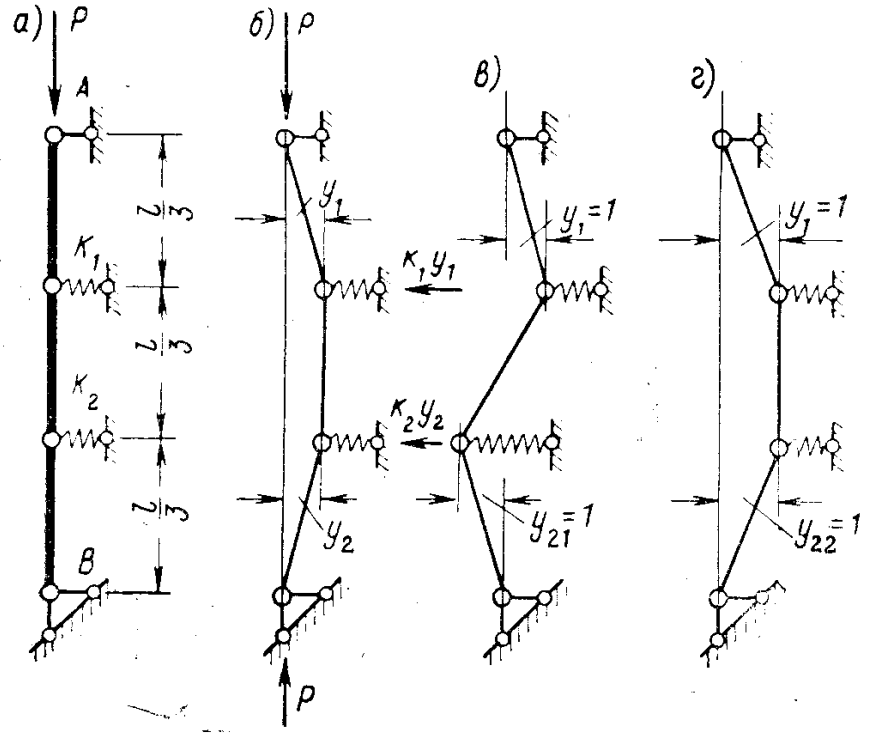
Далее рассмотрим обратносимметричную форму потери устойчивости (фиг. 25, *б*). Угол поворота среднего элемента α_3 может быть определен из условия равенства проекций отрезков CD и CE на горизонталь, т. е. $\alpha_2 = \frac{1}{2}\alpha_3$, откуда $\alpha_3 = 2\alpha_2$. Уравнение равновесия моментов относительно шарнира C запишется:

$$\sum M_C = Pl\alpha_2 - k3\alpha_2 = 0,$$

откуда имеем

$$P_{кр} = \frac{3k}{l}$$

№ 29. Определить значения критических сил в системе, представленной на фиг. 29. Элементы системы бесконечно жесткие. Жесткости связей равны k_1 и k_2. Каковы критические силы, когда $k_1 = k_2 = k$. Найдите формы потери устойчивости.



Фиг. 29

Решение. Система, представленная на фиг. 29, *а*, обладает двумя степенями свободы, причем за параметры могут быть приняты смещения опор y_1 и y_2 (фиг. 29, *б*). Следуя статическому методу, рассмотрим возмущенное состояние системы. Реакции в смещенных опорах соответственно равны: $R_1 = k_1 y_1$, $R_2 = k_2 y_2$. Тогда реакции в неподвижных опорах будут равны: $A = \frac{2k_1 y_1 + k_2 y_2}{3}$, $B = \frac{k_1 y_1 + 2k_2 y_2}{3}$, что непосредственно следует из рассмотрения моментов относительно опор B и A.

Возьмем теперь сумму моментов относительно шарниров I и II, рассматривая в первом случае равновесие верхней части системы, а во втором — равновесие нижней части, что дает

$$\sum M_{\mathrm{I}} = Py_1 - A\frac{l}{3} = 0;$$

$$\sum M_{\mathrm{II}} = Py_2 - B\frac{l}{3} = 0.$$

Из двух последних уравнений получаем $A = \frac{3Py_1}{l}$, $B = \frac{3Py_2}{l}$. Приравнивая найденные значения опорных реакций тем, которые были найдены ранее, и проводя элементарные преобразования, приходим к следующей системе однородных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{k_1 l}{3} y_1 + \left(\frac{2k_2 l}{3} - 3P\right) y_2 = 0; \\ &\left(\frac{2k_1 l}{3} - 3P\right) y_1 + \frac{k_2 l}{3} y_2 = 0. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(а)}$$

Определитель устойчивости при этом записывается

$$\begin{vmatrix} \frac{k_1 l}{3} & \frac{2k_2 l}{3} - 3P \\ \frac{2k_1 l}{3} - 3P & \frac{k_2 l}{3} \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получаем квадратное уравнение, определяющее критические силы

$$9P^2 - 2(k_1 + k_2) lP + \frac{1}{3} k_1 k_2 l^2 = 0.$$

В частном случае, когда $k_1 = k_2 = k$, критические силы равны:

$$P_{\text{кр}_1} = \frac{kl}{9}, \qquad P_{\text{кр}_2} = \frac{kl}{3}.$$

Для определения форм потери устойчивости обратимся к рассмотрению первого уравнения системы (а), откуда

$$y_2 = -\frac{k_1 l}{3\left(\frac{2k_2 l}{3} - 3P\right)} y_1.$$

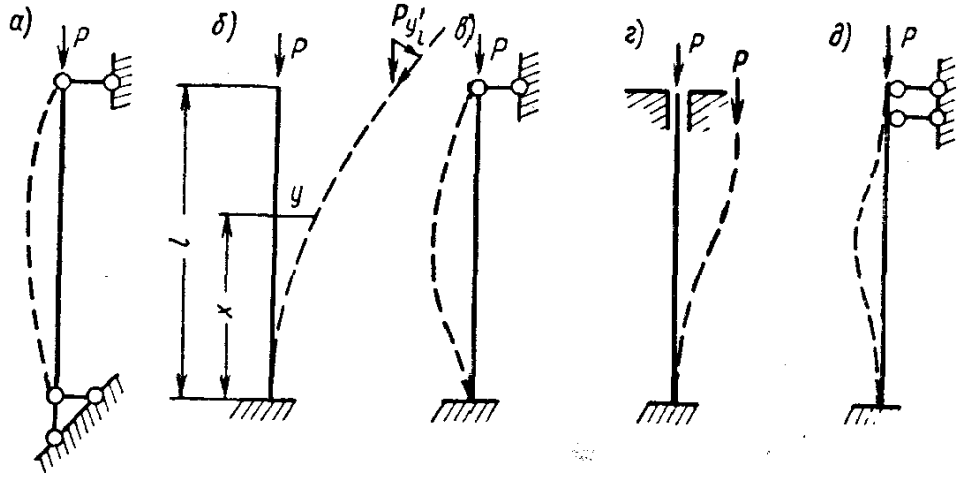
Полагая $y_1 = 1$ и подставляя найденные значения критических сил, в частном случае при $k_1 = k_2 = k$ получаем

$$y_{21} = -\frac{kl}{3\left(\frac{2kl}{3} - 3\frac{kl}{9}\right)} 1 = -1;$$

$$y_{22} = -\frac{kl}{3\left(\frac{2kl}{3} - 3\frac{kl}{3}\right)} 1 = 1.$$

Соответствующие формы изображены на фиг. 29, *в* и *г*.

№ 1. Найти величины наименьших критических сил, характер соответствующих им форм потери устойчивости для упругих стержней с различным закреплением концов (фиг. 3). Длина стержня l; жесткость EJ постоянна по длине.



Фиг. 3

Указание. Задачу решите двумя приемами. Первоначально используйте уравнение упругой линии, представленное формулой (7). Затем те же значения найдите с помощью метода начальных параметров.

Решение. Рассмотрим подробное решение в случае, изображенном на фиг. 3, *б*. Воспользуемся методом начальных параметров, который приводит к формулам (11). В заделке при $x = 0$ $y_0 = y'_0 = 0$. На свободном конце $M_l = 0$ и $Q_l = Py'_l$. Два последних уравнения (11) запишутся:

$$\left.\begin{aligned} M_0 \cos nl + Q_0 \frac{\sin nl}{n} = 0; \\ -M_0 n \sin nl + Q_0 \cos nl = Q_l. \end{aligned}\right\}. \qquad \text{(а)}$$

Но если воспользоваться вторым уравнением, то можно записать, что

$$Q_l = -P\left(M_0 \frac{n \sin nl}{P} + Q_0 \frac{1 - \cos nl}{P}\right) = \qquad \text{(б)}$$

$$= -M_0 n \sin nl - Q_0 (1 - \cos nl).$$

Подставляя выражение (б) в систему (а), после элементарных преобразований получим

$$\left.\begin{aligned} M_0 \cos nl + Q_0 \frac{\sin nl}{n} = 0 \\ Q_0 = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (в)$$

Определитель системы уравнений (в) можно записать в виде

$$\begin{vmatrix} \cos nl & \frac{\sin nl}{n} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, будем иметь

$$\cos nl = 0,$$

откуда

$$nl = \frac{\pi}{2}.$$

Возводя обе части последнего равенства в квадрат и определяя $P_{кр}$, получим

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{4l^2}.$$

Форму потери устойчивости получим, если воспользуемся первым выражением формул (11):

$$y = y_0 + y_0' x - M_0 \frac{1 - \cos nx}{P} - Q_0 \frac{nx - \sin nx}{P} = C_1 \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2l}\right).$$

Так как в рассматриваемом случае $v_{кр}^2 = \frac{\pi^2}{4}$, то коэффициент μ приведенной длины равен: $\frac{\pi}{v_{кр}} = 2$, а приведенная длина определяется как $l_0 = 2l$.

Ответ.

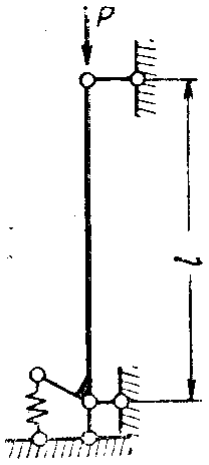
а) $P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}$; $y = C_1 \sin \frac{\pi x}{l}$; $l_0 = l$;

б) $P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{4l^2}$, $y = C_1 \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2l}\right)$; $l_0 = 2l$;

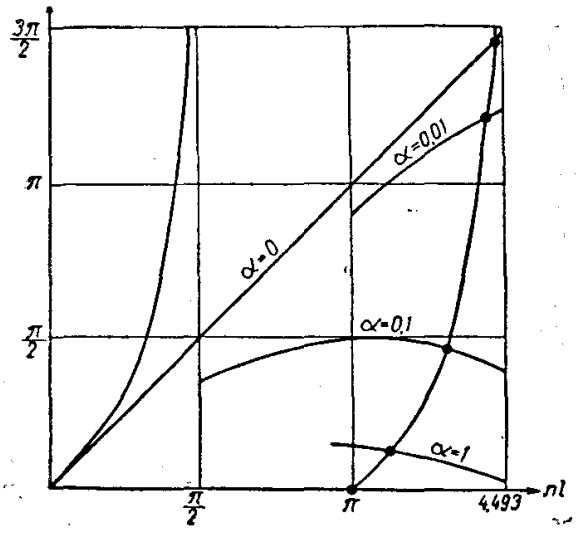
в) $P_{кр} = \frac{20{,}19 EJ}{l^2}$, $y = C_1 \left[4{,}493 (l - x) - \frac{\sin 4{,}493 (l - x)}{\cos 4{,}493 l}\right]$; $l_0 = 0{,}7l$;

г) $P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}$, $y = C_1 \left(1 - \cos \frac{\pi x}{l}\right)$; $l_0 = l$;

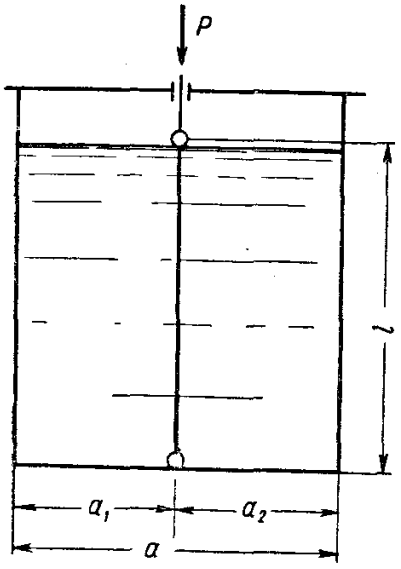
д) $P_{кр} = \frac{4\pi^2 EJ}{l^2}$, $y = C_1 \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{l}\right)$; $l_0 = \frac{1}{2} l$.



Фиг. 6



Фиг. 7



Фиг. 9

№ 4. Определить величину минимальной критической силы для стержня постоянного сечения, упруго опертого нижним концом, относительно поворота сечения. Жесткость стержня EJ, пролет l, жесткость упругой опоры k (фиг. 6). Построить график изменения величины критической силы в зависимости от жесткости упругой связи.

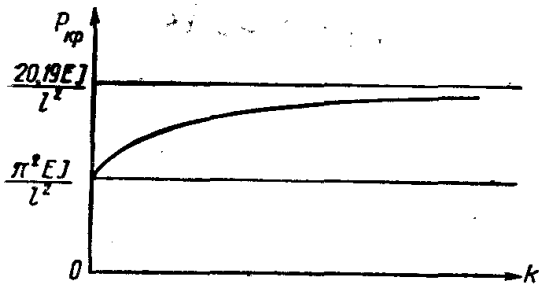
Решение. Воспользуемся методом начальных параметров, причем известно, что $y_0 = 0$ и $M_0 = -k\varphi_0 = -ky_0'$. При $x = lyl = 0$, $M_l = 0$. Запишем первое и третье уравнения применительно к верхнему концу стержня:

$$y_0'l + y_0'k\,\frac{1-\cos nl}{P} - Q_0\,\frac{nl-\sin nl}{P} = 0;$$

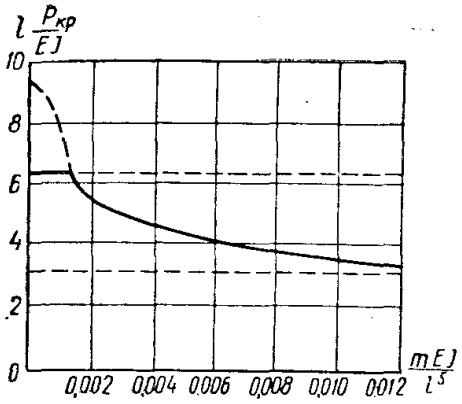
$$-y_0'\,k\cos nl + Q_0\,\frac{\sin nl}{n} = 0.$$

Полученная система уравнений однородна. Ее решение возможно, когда детерминант, составленный из коэффициентов при неизвестных y_0' и Q_0, равен нулю, т. е.

$$\begin{vmatrix} Pl + k - k\cos nl & -nl + \sin nl \\ -k\cos nl & \dfrac{\sin nl}{n} \end{vmatrix} = 0.$$



Фиг. 8



Фиг. 10

Уравнение устойчивости запишется:

$$\operatorname{tg} nl = \frac{nl}{\frac{Pl}{k} + 1}.$$

Если принять во внимание формулу (6), то последнее выражение можно записать в виде

$$\operatorname{tg} nl = \frac{nl}{n^2 l^2 \alpha + 1}, \qquad \text{(а)}$$

причем $\alpha = \frac{EJ}{kl}$ характеризует соотношение жесткостей стержня $\frac{EJ}{l}$ и упруго податливой опоры k. Величина α может изменяться от нуля, когда на нижнем конце стержень заделан ($k = \infty$), до бесконечности, когда нижний конец шарнирно оперт ($k = 0$).

Решение уравнения (а) удобно провести графически (фиг. 7).

В зависимости от nl на графике строятся кривые, уравнение которых $\operatorname{tg} nl$ и $\frac{hl}{n^2 l^2 \alpha + 1}$ даны при заданном значении α. Ординаты точек пересечения этих двух кривых определяют искомые значения nl, что позволяет найти величины критических сил.

На фиг. 8 показан характер зависимости критической нагрузки от жесткости упругой связи.

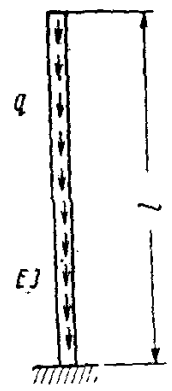
№ 2. Найти критическое значение равномерно распределенной нагрузки, действующей на консольный стержень с постоянным поперечным сечением (фиг. 4). Задачу решите статическим методом, а также приемом, предложенным А. П. Коробовым.

Указание. Прием, предложенный А. П. Коробовым[1], заключается в приведении всех нагрузок, действующих на стержне, к силе, действующей на верхнем конце. При действии ряда сил приведенная нагрузка, характеризуемая критическим параметром и определяемая из условия равноустойчивости, равна:

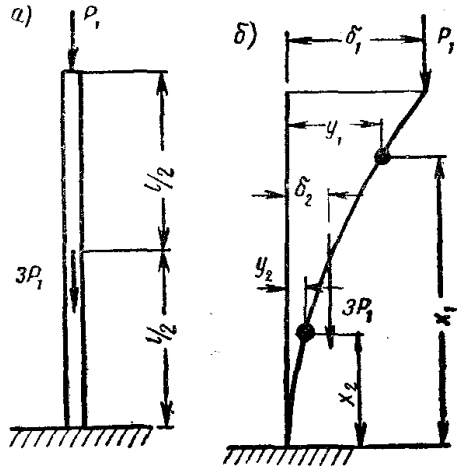
$$\lambda_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{4l^2} \cdot \frac{l^2}{P_1 l_1^2 + P_2 l_2^2 + \ldots + P_n l_n^2},$$

где P_i — величины действующих сил;
l_i — расстояние точки приложения i-й силы от заделки;
l — пролет стержня.

Ответ. Точное решение дает $q_{кр} = \frac{7{,}84EJ}{l^3}$, приближенное — $q_{кр} = \frac{7{,}40EJ}{l^3}$.



Фиг. 4



Фиг. 17

№ 11. Найти критическое значение параметра для стержня с одним защемленным, а другим свободным концом, на который действуют две сосредоточенные силы (фиг. 17, *а*). Задачу решите как статическим методом, так и приемом, предложенным А. П. Коробовым.

Решение. На верхнем участке (фиг. 17,*б*)

$$M = P_1(\delta_1 - y_1),$$

а дифференциальное уравнение изгиба запишется:

$$EJy_1'' + P_1 y_1 = P_1\delta_1.$$

На нижнем участке

$$M = P_1(\delta_1 - y_2) + 3P_1(\delta_2 - y_2).$$

Дифференциальное уравнение запишется:

$$EJy_2'' + 4P_1 y_2 = P_1\delta_1 + 3P_1\delta_2.$$

Интегралы этих уравнений представим в виде

$$y_1 = A\sin n_1 x + A_2\cos n_1 x + \delta_1;$$

$$y_2 = B_1\sin n_2 x + B_2\cos n_2 x + \frac{P_1\delta_1 + 3P_1\delta_2}{4P_1},$$

где

$$n_1 = \sqrt{\frac{P_1}{EJ}}; \quad n_2 = \sqrt{\frac{3P_1 + P_1}{EJ}} = 2\sqrt{\frac{P_1}{EJ}} = 2n_1.$$

Для нахождения неизвестных коэффициентов A_1, A_2 и B_1, B_2 рассмотрим следующие начальные и граничные условия:

1) при $x = 0$ $y_2' = 0$; 3) при $x = \frac{l}{2}$ $y_1' = y_2'$;

2) при $x = l$ $y_1 = \delta_1$; 4) при $x = \frac{l}{2}$ $y_1'' = y_2''$.

В соответствии с этими четырьмя условиями будем иметь

$$B_1 n_2 = 0.$$

Далее с учетом последнего выражения будем иметь

$$A_1 \sin n_1 l + A_2 \cos n_1 l = 0;$$

$$A_1 n_1 \cos \frac{n_1 l}{2} - A_2 n_1 \sin \frac{n_1 l}{2} = -B_2 n_2 \sin \frac{n_2 i}{2};$$

$$-A_1 n_1^2 \sin \frac{n_1 l}{2} - A_2 n_1^2 \cos \frac{n_1 l}{2} = -B_2 n_2^2 \cos \frac{n_2 l}{2}.$$

Определитель полученной системы уравнений приравняем нулю

$$\begin{vmatrix} \sin n_1 l & \cos n_1 l & 0 \\ \cos \frac{n_1 l}{2} & -\sin \frac{n_1 l}{2} & \frac{n_2}{n_1} \sin \frac{n_2 l}{2} \\ -\sin \frac{n_1 l}{2} & -\cos \frac{n_1 l}{2} & \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \cos \frac{n_2 i}{2} \end{vmatrix} = 0.$$

После элементарных преобразований будем иметь

$$\operatorname{tg} \frac{n_1 l}{2} \operatorname{tg} \frac{n_2 l}{2} = \frac{n_2}{n_1}.$$

Учитывая соотношение между n_2 и n_1, получим

$$\operatorname{tg} \frac{n_1 l}{2} \operatorname{tg} n_1 l = 2.$$

Решение этого уравнения дает $n_1 l = 1{,}23$, откуда

$$\lambda_{\text{кр}} = \frac{1{,}513 EJ}{l^2 P_1}.$$

Если решать эту же задачу методом А. П. Коробова, то будем иметь

$$\lambda_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EJ}{4l^2} \cdot \frac{l^2}{P_1 l^2 + 3P_1 \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \frac{\pi^2 EJ}{7l^2 P}.$$

Ответ. Точное решение дает $\lambda_{\text{кр}} = \frac{1{,}513 EJ}{l^2 P_1}$, приближенное (по А. П. Коробову) — $\lambda_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EJ}{7l^2 P_1}$. Расхождение между точным и приближенным составляет 6,8%.

№ 18. Проделать расчет по СНиП сжатой металлической колонны, шарнирно опертой по концам и несущей на верхнем конце силу $P = 150$ T. Материал стойки — сталь Ст.3, расчетное сопротивление при сжатии $R = 2100$ $кГ/см^2$, коэффициент условия работы равен 0,9. Размеры поперечного сечения представлены на фиг. 24. Длина стойки $l = 3$ $м$.

Решение. Определяем площадь поперечного сечения

$$F = 2 \cdot 2 \cdot 20 + 1 \cdot 12 = 92 \ см^2.$$

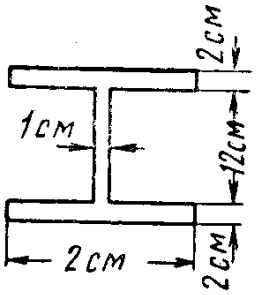
Моменты инерции относительно вертикальной и горизонтальной осей соответственно равны:

$$J_y = \frac{2 \cdot 20^3}{12^2} + \frac{12 \cdot 1^3}{12} = 2668 \ см^4;$$

$$J_x = \frac{1 \cdot 16^3}{12} + 19 \cdot 2 \cdot 7^2 \cdot 2 = 3483 \ см^4.$$

Минимальный радиус инерции будет равен:

$$r_{\min} = \sqrt{\frac{2668}{92}} = 5{,}40 \ см.$$



Фиг. 24

Гибкость стержня равна $\lambda = \frac{300}{5{,}40} \approx 55$. По табл. 10 определяем коэффициент продольного изгиба $\varphi = 0{,}87$. Используя теперь формулу (14), проверим неравенство

$$\frac{150\,000}{0{,}87 \cdot 92} < 2100 \cdot 0{,}9,$$

$$1872 < 1890,$$

которое оказывается удовлетворенным. Следовательно, принятое поперечное сечение удовлетворяет условиям устойчивости.