#### 2.УСТОЙЧИВОСТЬ СТЕРЖНЕЙ И СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

### 2.1 Общие понятия об устойчивости упругих систем и методах её исследования

Положение равновесия является устойчивым, если система возвращается в это положение при устранении внешнего воздействия, вызвавшего любое возможное малое отклонение.

Положение равновесия является *неустойчивым*, если система не возвращается в это положение при устранении внешнего воздействия и продолжает от него отклоняться.



Для упругого тела (системы) *устойчивость* – способность сохранять исходную форму упругого равновесия при действии внешних нагрузок.

С возрастанием нагрузки от нуля упругая система может в начале находиться в устойчивом равновесии при любых отклонениях. Затем, когда величина нагрузки превышает некоторый предел, наступает состояние, всё ещё устойчивое при малых отклонениях, но неустойчивое при конечных отклонениях определённого значения. Если же нагрузка доведена до некоторого критического значения, то система переходит в безразличное или неустойчивое состояние равновесия также и по отношению к малым отклонениям.

Далее возможны три исхода: а) система получает конечное упругое отклонение и переходит в новое устойчивое по отношению к малым отклонениям положение, б) система переходит в новое положение устойчивого равновесия в результате значительных отклонений и появления пластических деформаций, в) система разрушается.

Статический метод исследования устойчивости. Системе, находящейся в положении статического равновесия, придаётся малое отклонение и составляются дифференциальные уравнения равновесия системы в отклонённом положении. Если эти уравнения (в отклонённом положении) допускают только одно решение, то это положение системы является устойчивым. Если некоторым значениям нагрузки соответствуют несколько решений, то наряду с исходной формой равновесия возможны отклонённые формы и исходное положение равновесия является безразличным. Значения нагрузок, при которых возможно безразличное равновесие называются критическими нагрузками.

При нагрузках, больших, чем критические, равновесие становится неустойчивым.

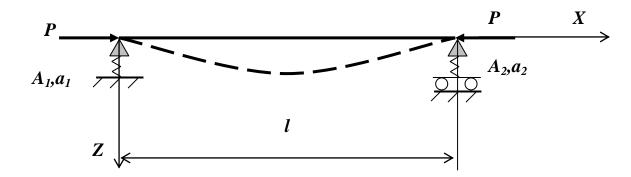
Явление интенсивного возрастания отклонений при нагрузках, больших, чем критические, называют *потерей устойчивости*.

Динамический метод исследования устойчивости. Путём интегрирования дифференциальных уравнений движения системы исследуется поведение системы во времени. Если перемещения точек системы остаются ограниченными, то система устойчива, если нет — неустойчива.

### 2.2. Устойчивость однопролётных сжатых стержней

При общем изгибе корпуса судна продольные балки судового набора испытывают сжатие и могут потерять устойчивость. Для выбора размеров балок необходимо определить критические нагрузки.

Рассмотрим стержень длиной l, нагруженный силой P, направленной вдоль оси стержня. Опоры характеризуются коэффициентами податливости при просадке  $A_1,A_2$  и коэффициентами податливости при повороте  $a_1,a_2$ . Изгибная жёсткость стержня EI=const.



Дифференциальное уравнение (сложного) изгиба стержня имеет вид:

$$EIw^{IV} + Pw'' = 0 (1)$$

Общее решение данного уравнения имеет вид:

$$w = C_0 + C_1 kx + C_2 \cos kx + C_3 \sin kx \tag{2}$$

гле

$$k = \sqrt{P/(EI)} \tag{3}$$

Произвольные постоянные  $C_i$  определяются из граничных условий на концах стержня, в результате чего может быть решён вопрос о существовании ненулевого решения уравнения (1).

Граничные условия на концах стержня:

$$w(0) = -A_1 [(EIw'')' + Pw']_{x=0}; w'(0) = +a_1 EIw''(0); w(l) = A_2 [(EIw'')' + Pw']_{x=l}; w'(l) = -a_2 EIw''(l);$$
(4)

#### 2.2.1. ШАРНИРНЫЕ ОПОРЫ.

В данном случае  $A_1 = A_2 = 0$ ;  $a_1 = a_2 = \infty$  и граничные условия принимают вид: w(0) = w(l) = w''(0) = w''(l) = 0

Подставляя (2), найдём:

Из условий на левой опоре -  $C_0 + C_2 = 0$ ,  $C_2 = 0$ , следовательно,  $C_0 = C_2 = 0$ .

Из условий на правой опоре -

$$C_1kl + C_3\sin kl = 0$$

$$C_3k^2\sin kl = 0$$

Эта система имеет очевидное нулевое решение  $C_1 = C_3 = 0$ , которое соответствует неискривлённой форме стержня w = 0.

Ненулевое решение  $C_1 \neq 0, C_3 \neq 0$  данная система из двух линейных уравнений будет иметь, если её определитель будет равен нулю

$$\begin{vmatrix} kl & \sin kl \\ 0 & k^2 \sin kl \end{vmatrix} = k^3 l \sin kl = 0$$

Та как  $k^3l \neq 0$ , следовательно  $\sin kl = 0$  и

$$kl = n\pi$$
 (5

В этом случае система имеет решение  $C_1 = 0, C_3 \neq 0$ , причём величина  $C_3$  может принимать любое значение. Стержень может находиться в равновесии с прогибом

$$w = C_3 \sin \frac{n\pi x}{l} \tag{6}$$

Подставляя (3) в (5), найдём

$$P = k^2 E I = \frac{\pi^2 n^2 E I}{I^2}$$

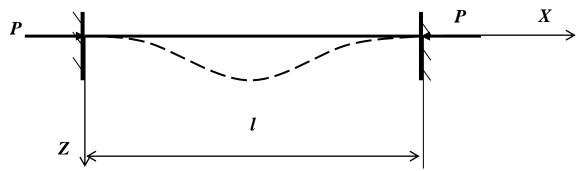
При n=1 получим

$$P_{\mathcal{F}} = \frac{\pi^2 EI}{I^2} \tag{7}$$

– формула Эйлера для критической нагрузки сжатого стержня.

Критические нагрузки, найденные в предположении о линейной упругости материала и малости перемещений называют *эйлеровыми* нагрузками.

#### 2.2.2. ЖЁСТКАЯ ЗАДЕЛКА



В данном случае  $A_1 = A_2 = a_1 = a_2 = 0$  и граничные условия принимают вид:

$$w(0) = w(1) = w'(0) = w'(1) = 0$$

$$w = C_0 + C_1 kx + C_2 \cos kx + C_3 \sin kx$$
 (2)

$$w' = C_1 k - C_2 k \sin 9x + C_3 k \cos kx$$

Подставляя (2), найдём:

Из условий на левой опоре -  $C_2 = -C_0$ ,  $C_1 = -C_3$ .

Из условий на правой опоре -

$$C_0(1 - \cos kl) + C_1(kl - \sin kl) = 0$$

$$C_0 \sin kl + C_1(1 - \cos kl) = 0$$

Ненулевое решение  $C_1 \neq 0, C_0 \neq 0$  данная система из двух линейных уравнений будет иметь, если её определитель будет равен нулю.

$$(1-\cos kl)^2 - (kl - \sin kl)\sin kl = 0$$

Промежуточные выкладки:

$$1 - 2\cos kl + \cos^2 kl - kl\sin kl + \sin^2 kl = 0$$

$$2-2\cos kl-9l\sin kl=0$$

$$2 \cdot (\cos^2 \frac{kl}{2} + \sin^2 \frac{kl}{2} - \cos^2 \frac{kl}{2} + \sin^2 \frac{kl}{2}) - \frac{kl}{2} \sin \frac{kl}{2} \cos \frac{kl}{2} \cdot 4 = 0$$

$$\sin^2 \frac{kl}{2} - \frac{kl}{2} \sin \frac{kl}{2} \cos \frac{kl}{2} = 0 | :\cos \frac{kl}{2}$$

$$\sin\frac{kl}{2}(tg\,\frac{kl}{2}-\frac{kl}{2})=0$$

После преобразований можно получить:

$$(tg\,\frac{kl}{2} - \frac{kl}{2})\sin\frac{kl}{2} = 0$$

Данное уравнение распадается на два уравнения:

$$tg\frac{kl}{2} - \frac{kl}{2} = 0$$

$$\sin\frac{kl}{2} = 0$$
(8)

Решение второго уравнения:

$$\frac{kl}{2} = n2\pi$$

откуда с учётом (3) получим:

$$P = \frac{n^2 4\pi^2 EI}{l^2}$$

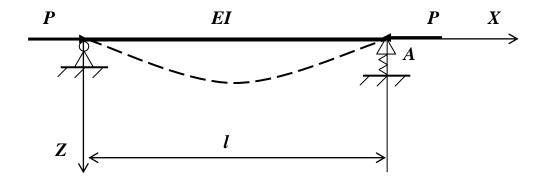
Наименьшее значение получим для n = 1:

$$P9 = \frac{4\pi^2 EI}{l^2} \tag{9}$$

Можно показать, что первое из уравнений (8) даёт б**о**льшую величину критической нагрузки.

Подставляя  $\sin\frac{kl}{2}=0$  в систему уравнений, найдём  $C_1=0$  . Форма потери устойчивости:  $w=C_0(1-\cos kl)$ 

### 2.2.3. ОДНА ОПОРА ШАРНИРНО-НЕПОДВИЖНАЯ, ДРУГАЯ – УПРУГО-ПРОСЕДАЮЩАЯ



Граничные условия на левой опоре: w(0) = w''(0) = 0, откуда получаем:  $C_0 = C_2 = 0$ . Граничные условия на правой опоре:  $w(l) = A\big[EIw'''(l) + Pw'(l)\big]; \ w''(l) = 0$ .

$$w = C_0 + C_1 kx + C_2 \cos kx + C_3 \sin kx = C_1 kx + C_3 \sin kx$$

$$w' = C_1 k - C_2 k \sin kx + C_3 k \cos kx = C_1 k + C_3 k \cos kx$$

$$w'' = -C_2 k^2 \cos kx - C_3 k^2 \sin kx = -C_3 \vartheta^2 \sin kx$$

$$w''' = C_2 k^3 \sin kx - C_3 k^3 \cos kx = -C_3 k^3 \cos kx$$
Подставляем:
$$C_1 kl + C_3 \sin kl = A[-ElC_3 k^3 \cos kl + P(C_1 k + C_3 k \cos kl)]$$

$$C_1 k^2 \sin kl = 0$$

$$C_3k^2 \sin kl = 0$$

$$C_1(kl - APk) + C_3(\sin kl + AElk^3 \cos kl - APk)$$
Upacing any page 1.

С учётом (1.3)

$$C_{1}(kl - APk) + C_{3}\sin kl = 0$$

$$C_{3}k^{2}\sin kl = 0$$
(\*)

Приравниваем нулю определитель:

$$(kl - ATk)k^2 \sin kl = 0$$

Данное уравнение распадается на два. Первое:

$$l - AP = 0$$
,

откуда находим:

$$P_{\Im 1} = \frac{l}{A}$$

Второе:

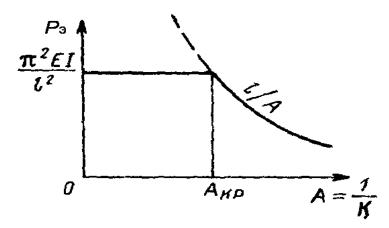
 $\sin kl = 0$ 

откуда аналогично (7) находим:

$$P_{\mathfrak{I}2} = \frac{\pi^2 EI}{I^2}$$

При большой податливости (малой жёсткости) опоры  $P_{\ni 1} < P_{\ni 2}$  когда  $\sin kl \neq 0, C_3 = 0$ и  $w(x) = C_1 kx$ , то есть форма потери устойчивости – наклонная прямая.

Увеличение жёсткости опоры (уменьшение коэффициента податливости) приведёт к возрастанию эйлеровой силы и при  $A = A_{\rm kp}$ 



. Зависимость эйлеровой силы от коэффициента податливости опоры

$$P_{32} = P_{31}$$

$$\frac{\pi^2 EI}{l^2} = \frac{l}{A}$$

Откуда находим:

$$K_{\rm kp} = \frac{1}{A} = \frac{\pi^2 EI}{I^3}$$

*Критической жёсткостью* называют наименьшую жёсткость опоры, при которой потеря устойчивости происходит без смещения опоры.

Увеличение жёсткости упругой опоры выше критической не изменяет значения эйлеровой силы, которая определяется выражением (7). В этом случае  $\sin kl = 0$ , тогда из 2-го уравнения (\*) следует  $C_3 \neq 0$ , а с учётом (3)  $k^2 = P/(EI)$  из 1-го  $C_1 = 0$ . Форма потери устойчивости — полуволна синусоиды.

#### ПОРЯДОК ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЭЙЛЕРОВОЙ НАГРУЗКИ СТЕРЖНЯ

- 1. Записать граничные условия (4)
- 2. Подставить выражение для прогиба (2) в граничные условия и получить систему линейных однородных алгебраических уравнений для определения произвольных постоянных  $C_i$ .
- 3. Приравнять нулю определитель этой системы и найти наименьший корень  ${\mathcal G}$  характеристического уравнения .
- 4. Подставить k в формулу (3) и найти эйлерову силу

$$P_{\exists} = k^2 EI$$

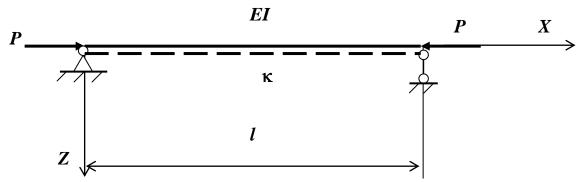
5. Для отыскания формы потери устойчивости подставить k в систему линейных однородных алгебраических уравнений и выразить все константы через одну.

Общую формулу для эйлеровой силы однопролётных стержней можно записать в виде:

$$P_{\Im}=rac{\pi^{2}EI}{\left(\mu l
ight)^{2}}$$
 или  $P_{\Im}=Krac{\pi^{2}EI}{l^{2}},$  где  $K=rac{1}{\mu^{2}}$ 

где  $\mu$  — коэффициент приведения длины, равный доле длины стержня, которую занимает полуволна синусоиды для данной формы потери устойчивости:  $\mu$  = 1 для свободно опертого стержня,  $\mu$  = 2 для консольного стержня,  $\mu$  = 0,5 для стержня, жестко заделанного с обоих концов и  $\mu$  = 0,7 для шарнирной опоры с одной стороны и жёсткой заделки с другой.

## 2.2.4. ШАРНИРНО ОПЁРТЫЙ СТЕРЖЕНЬ, ЛЕЖАЩИЙ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ.



В отклонённом положении стержень будет испытывать сложный изгиб под действием сжимающей силы P и поперечной нагрузки  $q(x) = \kappa w(x)$ , являющейся реакцией упругого основания. Дифференциальное уравнение изогнутой оси стержня примет вид:

$$EIw^{IV} + Pw'' + \kappa w = 0 \tag{10}$$

В данном случае граничные условия принимают вид:

$$w(0) = w(1) = w''(0) = w''(1) = 0$$

Решение данного уравнения будем искать в следующем виде, удовлетворяющем граничным условиям:

$$w = a \sin \frac{n\pi x}{l} \tag{11}$$

где a - произвольная постоянная, n – число полуволн формы потери устойчивости.

Подставляя (11) в (10), получим:

$$\left[EI\left(\frac{n\pi}{l}\right)^4 - P\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 + \kappa\right]a\sin\frac{n\pi x}{l} = 0$$

Приравнивая нулю выражение в квадратной скобке, найдём выражение для величины сжимающей силы, при которой возможны отклонённые формы равновесия стержня:

$$P = \frac{\pi^2 E I n^2}{l^2} + \frac{\kappa l^2}{\pi^2 n^2}$$
 (12)

или

$$P = \frac{\pi^2 EI}{l^2} (n^2 + \frac{\gamma}{n^2}) \tag{13}$$

где 
$$\gamma = \frac{\kappa l^4}{\pi^4 EI}$$
.

Для k=0 (12) совпадает с (7). Эйлерова нагрузка является наименьшей из величин, определяемых выражениями (12), (13) и зависящих от числа полуволн потери устойчивости. Для достаточно длинных балок, лежащих на достаточно жёстком упругом основании число полуволн велико и его допустимо считать непрерывной величиной. Приравнивая нулю производную от правой части (13) по n, найдём:

$$n = \sqrt[4]{\gamma} = \sqrt[4]{\frac{\kappa l^4}{\pi^4 EI}} = \frac{l}{\pi} \sqrt[4]{\frac{\kappa}{EI}}$$

Подставляя данное выражение в (13), получим формулу для вычисления Эйлеровой нагрузки:

$$P_{\mathfrak{I}} = 2\sqrt{\kappa EI} \tag{14}$$

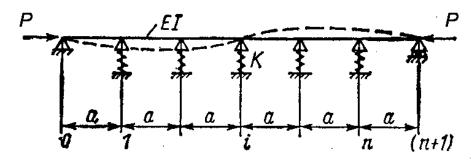
Для относительно жёсткого упругого основания эйлерова нагрузка стержня не зависит от его длины.

При этом длина полуволны формы потери устойчивости равна:

$$\frac{l}{n} = \pi \sqrt[4]{\frac{EI}{\kappa}}$$

При расчёте конкретного стержня сначала вычисляют параметр  $\gamma$ , а затем определяют n, при котором критическая нагрузка минимальна.

# 2.3. Многопролётный стержень, опирающийся на равноотстоящие упругие опоры



n – число промежуточных опор жёсткости K

Для раскрытия статической неопределимости стержня в отклонённом положении составляется система уравнений метода пяти моментов для случая сложного изгиба с учётом влияния продольной сжимающей силы. Система содержит 2n неизвестных — опорные моменты и просадки опор. Приравнивая нулю определитель данной однородной системы линейных уравнений и решая полученное уравнение относительно K, можно получить следующую зависимость между параметрами упругой системы и значением эйлеровой силы  $P_3$ :

$$K = \frac{\pi^4 E I \chi_j(\lambda)}{a^3} \tag{15}$$

где j – число полуволн потери устойчивости;

$$u = \frac{a}{2} \sqrt{\frac{P_{\Im}}{EI}}$$
 - параметр сложного изгиба;

$$\lambda = \left(\frac{2u}{\pi}\right)^2 = \frac{a^2 P_{\Im}}{\pi^2 EI} = \frac{P_{\Im}}{T_0}$$
 (16)

— отношение эйлеровой силы для всего стержня  $P_{\mathfrak{I}}$  к эйлеровой силе одного пролёта при свободном опирании на жёсткие опоры  $P_{\mathfrak{I}}$ .

Так как  $P_0$  есть верхний предел эйлеровой нагрузки для стержня на упругих опорах, то всегда  $\lambda \leq 1$ .

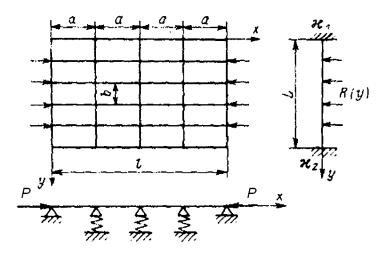
 $\chi_j(\lambda)$  — функция, содержащая алгебраические выражения и тригонометрические функции  $j,n,\lambda$ . Данная функция монотонно возрастает с ростом  $\lambda$  (монотонно убывает с уменьшением).

Если параметры стержня и упругих опор заданы, то надо в уравнении (15) подобрать число полуволн j, при котором  $\lambda$  оказывается минимальным, после чего эйлерова сила определится из формулы (16).

Критическая жёсткость опор (когда опоры не смещаются при потере устойчивости) определяется из уравнения (15) при  $\lambda = 1$ . С увеличением жёсткости от 0 до  $K_{\rm kp}$   $P_{\rm 3}$  монотонно возрастает, при дальнейшем увеличении — не меняется.

#### 2.4. Перекрытие

Рассмотрим перекрытие, состоящее из большого числа одинаковых равноотстоящих продольных балок, сжатых одинаковыми силами P, и одинаковых поперечных балок-бимсов. Упругая заделка всех бимсов на опорном контуре одинакова. Продольные балки свободно опираются на жёсткие опоры.



Такой расчётной схеме может соответствовать палубное перекрытие, опорами которого являются борта и поперечные переборки.

Форма потери устойчивости перекрытия принимается в следующем виде:

$$w(x, y) = X(x) \cdot Y(y), \tag{17}$$

где X(x) – форма изгиба продольных балок, Y(y) – форма изгиба бимсов.

Продольная балка загружена вертикальными реакциями R в узлах и продольной сжимающей силой T, а каждый бимс — только вертикальными реакциями. Поскольку форма изгиба всех продольных балок одинакова, их прогибы при одинаковых силах T должны быть пропорциональны поперечной нагрузке R и, следовательно,

$$R = Kw \tag{18}$$

где K – постоянный коэффициент пропорциональности между прогибом и узловыми реакциями.

Воздействие бимсов на продольные балки эквивалентно воздействию упругих опор с жёсткостью K. Это позволяет применить к продольным балкам расчётную схему балки на равноотстоящих упругих опорах.

Для определения K рассмотрим изгиб бимса, создающего упругие опоры для продольных балок. Сосредоточенные реакции, действующие на бимсы со стороны продольных балок, заменим распределённой нагрузкой  $\frac{R}{b}$ . Тогда дифференциальное уравнение изгиба бимса можно записать в виде:

$$EI_{\delta} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{R}{b} = \frac{K}{b} w \tag{19}$$

Реакции, действующие на бимс, направлены в сторону прогиба.

Подставляя (17) в (19) получим следующее уравнение для определения формы изгиба бимсов Y(y):

$$Y^{IV} - (\mu/L)^4 Y = 0, (20)$$

где 
$$(\mu/L)^4 = K/(bEI_{\delta})$$
 (21)

Общее решение данного диф. уравнения имеет вид:

$$Y = A \operatorname{ch} \frac{\mu}{L} + B \operatorname{sh} \frac{\mu}{L} + C \cos \frac{\mu}{L} + D \sin \frac{\mu}{L}$$

Оно содержит 4 произвольные постоянные, определяемые из граничных условий на концах стержня. Приравнивая нулю определитель системы линейных однородных уравнений, получим уравнение для определения величины  $\mu$  (истинным считается наименьший из корней трансцендентного характеристического уравнения) и, следовательно, жёсткости K (по(21)) и формы потери устойчивости бимсов.

Подставляя K в (15), получим уравнение устойчивости рассматриваемого перекрытия:

$$I_{\delta} = \left(\frac{\pi}{\mu}\right)^4 \left(\frac{L}{a}\right)^3 \frac{L}{b} I \chi_j(\lambda) \tag{22}$$

Критическая сила для продольных балок входит в (22) через параметр  $\lambda$  (16).

Поскольку  $\chi_j(\lambda)$  является возрастающей функцией аргумента  $\lambda$ , с увеличением  $I_6$  возрастает критическая нагрузка перекрытия.

Предельному значению  $\lambda = 1$  соответствует так называемое критическое значение момента инерции бимсов:

$$I_{6. \text{ kp.}} = \left(\frac{\pi}{\mu}\right)^4 \left(\frac{L}{a}\right)^3 \frac{L}{b} I\chi_j(1)$$
 (22a)

При возрастании момента инерции бимсов сверх  $I_{\text{б. кр.}}$  критическая нагрузка не увеличивается. Бимсы создают для продольных балок абсолютно жёсткие опоры.

### 2.5. Потеря устойчивости плоской формы изгиба

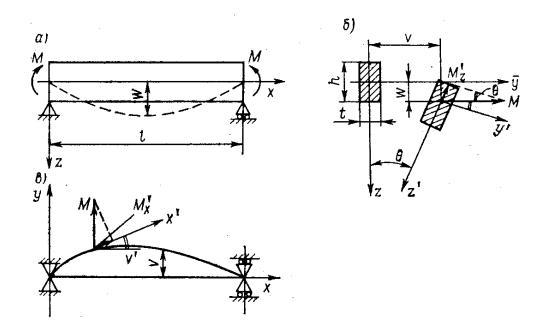
Изгиб тонкостенных стержней в плоскости наибольшей жёсткости может сопровождаться потерей устойчивости плоской формы изгиба, то есть изгибом в плоскости наименьшей жёсткости и кручением стержня относительно его оси.

Основные закономерности потери устойчивости плоской формы изгиба изучим на примере истого изгиба прямоугольной полосы. Концевые опоры допускают свободный поворот в плоскостях ZX и XY и исключают поворот вокруг оси X.

До потери устойчивости полоса изгибается в плоскости ZX и при малых прогибах этот изгиб описывается уравнением

$$EIw'' = M (23)$$

где EI – изгибная жёсткость полосы в плоскости ZX.



Допустим, что помимо перемещения w(x) в плоскости ZX полоса получила малое перемещение v(x) в плоскости XY и поворот на малый угол  $\theta(x)$  вокруг оси X. В результате поворота поперечного сечения вектор полного момента M, который сохраняет величину и направление для всех поперечных сечений (параллелен оси Y недеформированного стержня), можно разложить на составляющие, параллельные осям Z' и X' деформированного стержня:

$$M'_{z} = -M\theta \qquad M'_{x} = Mv' \tag{24}$$

 $M_{_{\it 7}}^{\prime}$  вызывает изгиб стержня в плоскости наименьшей жёсткости,  $M_{_{\it X}}^{\prime}$  - кручение.

Изгибающий и крутящий моменты связаны с перемещениями зависимостями, известными из курса «Сопротивление материалов»:

$$EI_z v''(x) = M'_z$$

где  $I_z$  - момент инерции поперечного сечения относительно оси  $\,z\,.$ 

$$C\mathcal{G}' = M'_{r}$$

где C – жесткость стержня при кручении,  ${\mathcal G}$  - угол закручивания.

Подставляя в эти зависимости выражения (24), получим:

$$EI_{z}v'' + M\vartheta = 0$$

$$C\theta' - Mv' = 0$$
(25)

Система дифференциальных уравнений (25) представляет собой условия равновесия стержня в отклонённом положении. Поскольку граничные условия имеют вид  $v=\theta=0$  при x=0; x=l, решение системы будем искать в форме  $v=v_0\sin\frac{n\pi x}{l}$ ;  $\theta=\theta_0\sin\frac{n\pi x}{l}$ . Подставляя данные выражения в (25), получим:

$$-EI_{z}v_{0}\left(\frac{n\pi}{l}\right)^{2}\sin\frac{n\pi x}{l} + M\theta_{0}\sin\frac{n\pi x}{l} = 0$$

$$-C\theta_{0}\frac{n\pi}{l}\cos\frac{n\pi x}{l} + Mv_{0}\frac{n\pi}{l}\cos\frac{n\pi x}{l} = 0$$

$$-EI_{z}v_{0}\left(\frac{n\pi}{l}\right)^{2} + M\theta_{0} = 0$$

$$Mv_{0} - C\theta_{0} = 0$$

Приравнивая нулю определитель этой системы, получим:

$$EI_z \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 C - M^2 = 0$$

$$M = \frac{n\pi}{l} \sqrt{EI_z C}$$

Наименьшее эйлерово значение момента будет при n = 1:

$$M_{\mathcal{F}} = \frac{\pi \sqrt{EI_z C}}{I} \tag{26}$$

Для прямоугольной полосы:  $I_z = \frac{ht^3}{12}; C = G\frac{ht^3}{3} = E\frac{ht^3}{6(1+v)}$  при t << h . Тогда:

$$M_{\Im} = \frac{\pi E h t^3}{6l\sqrt{2(1+v)}} \tag{27}$$

Напряжения в крайних волокнах:

$$\sigma = \frac{M_{\Im}}{th^2 / 6} = \frac{\pi E}{\sqrt{2(1+v)}} \frac{t}{l} \frac{t}{h}$$
 (28)

Полученные формулы показывают, что наиболее склонны к потере устойчивости плоской формы изгиба тонкостенные длинные стержни.

Опасность потери устойчивости плоской формы изгиба возникает, когда жёсткость на кручение и изгибная жёсткость в плоскости наименьшей жёсткости малы по сравнению с изгибной жёсткостью в основной плоскости изгиба.

### 2.6. Влияние отступлений от закона Гука на устойчивость стержней

Полученные формулы для эйлеровых сил не применимы, если потеря устойчивости сжатого стержня происходит при напряжениях, превышающих предел пропорциональности материала. Чтобы установить пределы применимости формулы (7) для эйлеровой силы, вычислим напряжения, соответствующие этой силе, — эйлеровы напряжения  $\sigma_3$ . Разделив обе части формулы (7) на площадь поперечного сечения стержня F, получим

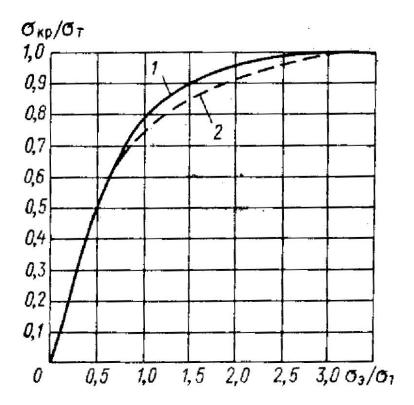
$$\sigma_{s} = T_{s}/F = \pi^{2}EI/[(\mu_{0}I)^{2}F] = \pi^{2}E/\lambda_{0}^{2},$$
(29)

где  $\lambda_0 = \mu_0 l/r$  — гибкость стержня  $(r = \sqrt{I/F} -$ радиус инерции перечного сечения стержня).

Если в формуле (29) положить  $\sigma_{\mathfrak{p}}$  равным пределу пропорциональности материала  $\sigma_{\mathfrak{n}\mathfrak{q}}$ , то нетрудно установить, что эта формула применима, когда  $\lambda_0 \geqslant \pi \sqrt{E/\sigma_{\mathfrak{n}\mathfrak{q}}}$ . Для малоуглеродистой стали при  $\sigma_{\mathfrak{n}\mathfrak{q}} = 200$  МПа и  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа формула (29) применима при  $\lambda_0 \geqslant 100$ .

В большинстве случае размеры стержней в судовых конструкциях таковы, что для них  $\lambda_0 < 100$ , и поэтому при исследовании устойчивости необходимо учитывать отступления от закона Гука. Следовательно, задача сводится к определению критических сил и соответствующих им критических напряжений, которые, как уже указывалось, отличаются от эйлеровых сил и эйлеровых напряжений вследствие отступлений от закона Гука.

В практике судостроительных расчетов используют обобщенные графики, построенные по экспериментальным данным, или справочные таблицы, устанавливающие зависимость между  $\sigma_{\text{кр}}$  и  $\sigma_{\text{э}}$ . На рис. приведены указанные графики для судостроительных сталей (кривая 1) и алюминиево-магниевых сплавов (кривая 2). По осям координат отложены безразмерные величины  $\sigma_{\text{кр}}/\sigma_{\text{т}}$  и  $\sigma_{\text{э}}/\sigma_{\text{т}}$ , где  $\sigma_{\text{т}}$ — предел текучести материала.



По теоретическим формулам типа находят эйлерово напряжение  $\sigma_9$ ; вычисляют отношение  $\sigma_9/\sigma_\tau$  и по графикам рис. определяют  $\sigma_{KP}/\sigma_\tau$ , а затем и  $\sigma_{KP}$ .

Действительную критическую нагрузку находят по формуле:

$$P_{\rm kp} = \sigma_{\rm kp} A$$